

# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Inleiding

## Hoofdstuk 1

### Basisconcepten

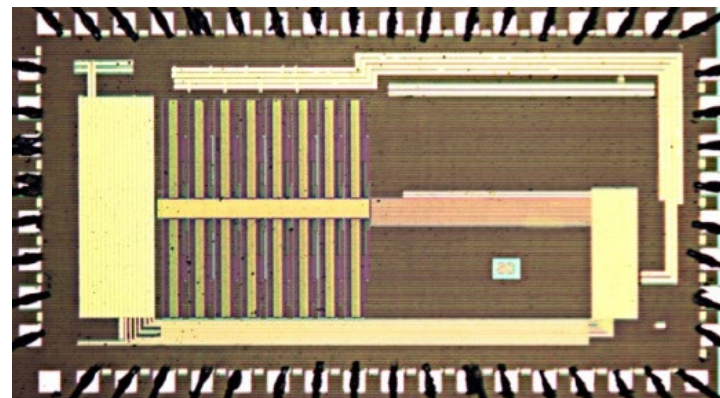
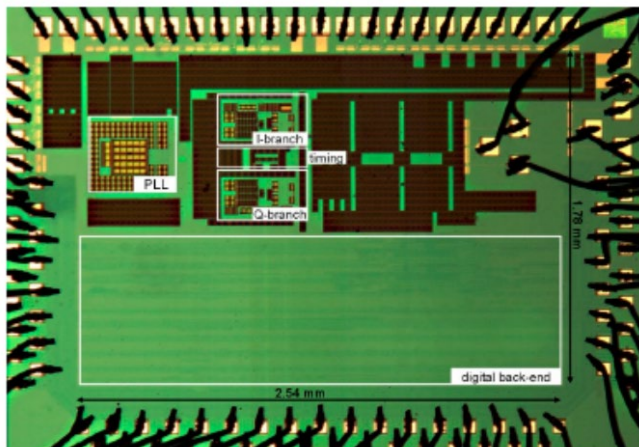
W. Dehaene

---



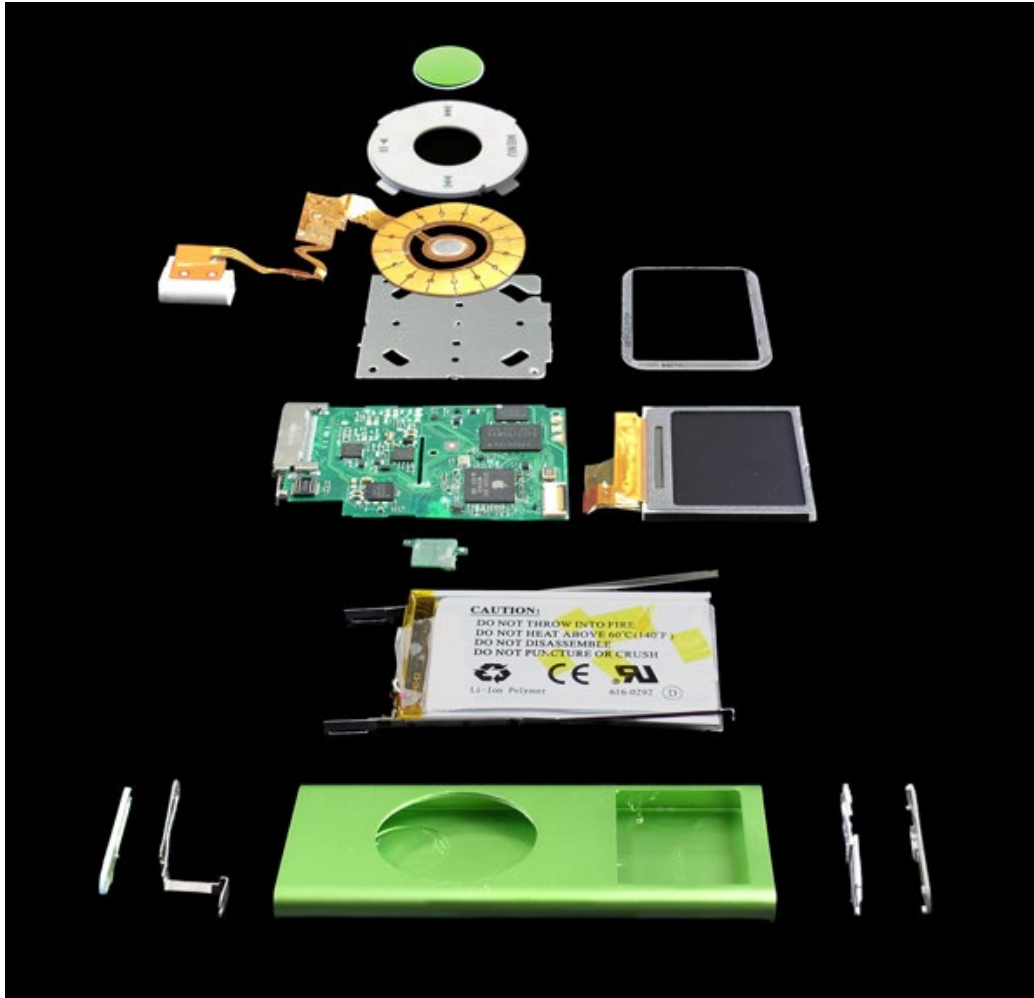
- prof. dr. [ir. Wim Dehaene](#)
- [wim.dehaene@esat.kuleuven.be](mailto:wim.dehaene@esat.kuleuven.be)
- KULeuven, groep W&T, dept. Elektrotechniek-ESAT, afdeling MICAS

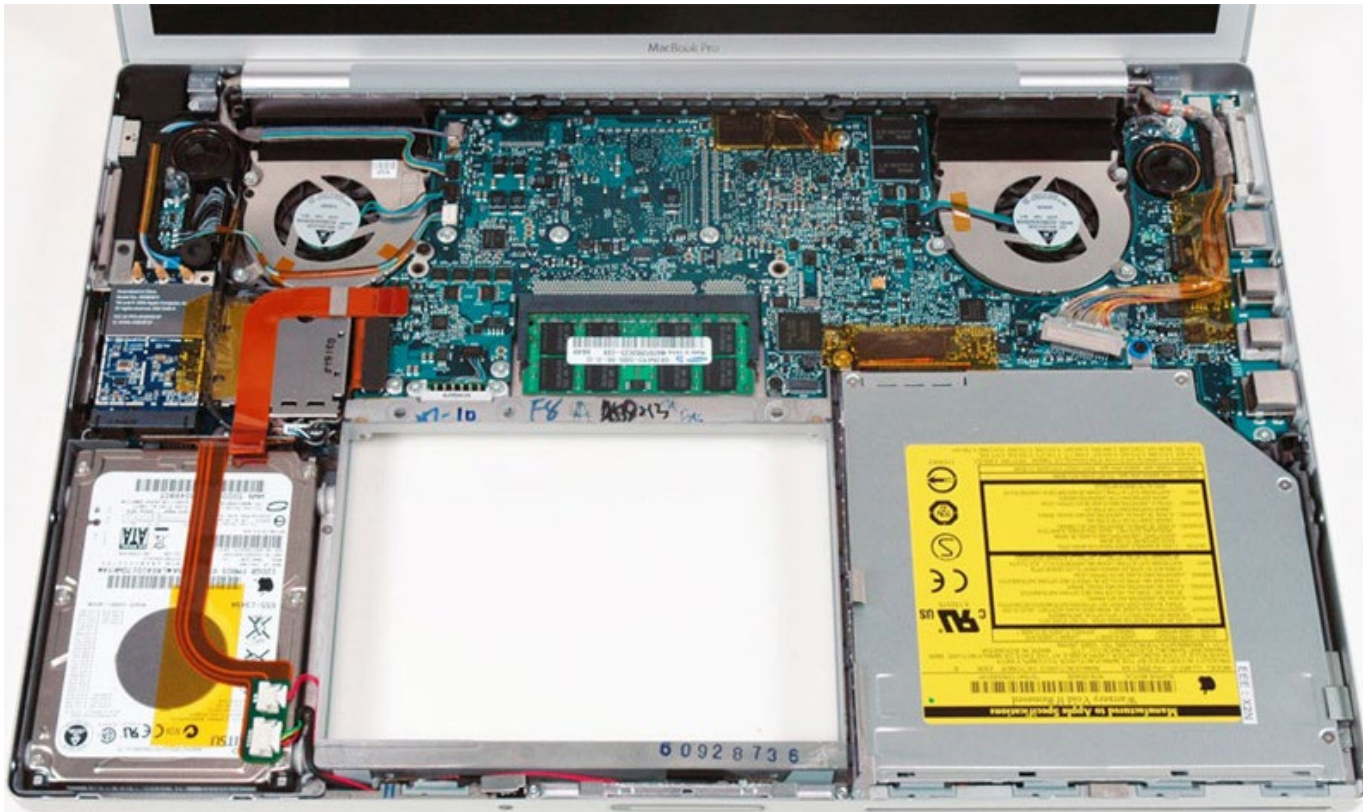
- Werkzaam in onderzoek naar digitale geïntegreerde schakelingen: “chips”
- Onderwijsopdracht
  - P en O
  - Digitale geïntegreerde schakelingen
  - Elektrische netwerken (!)



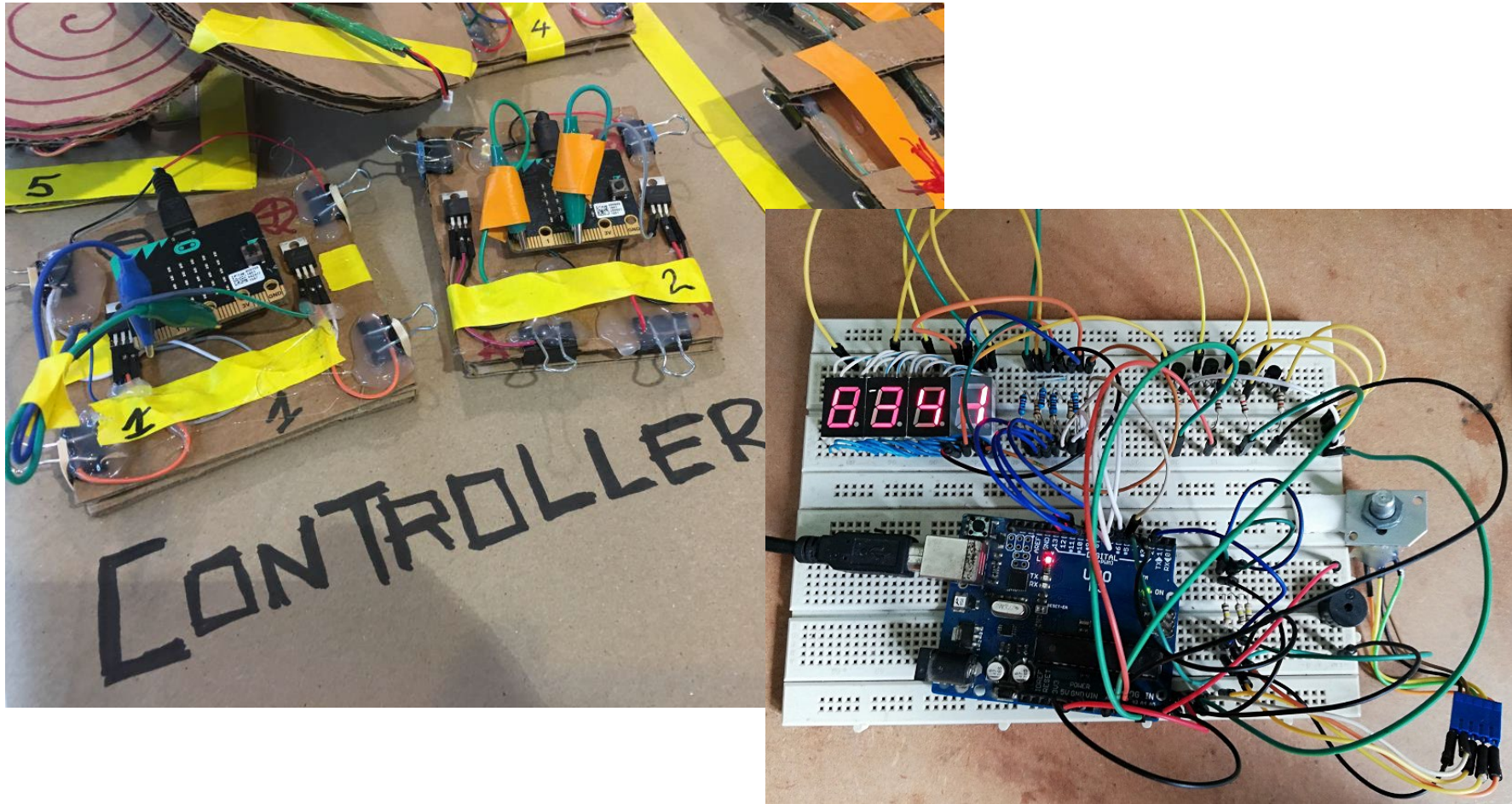
- **Inzicht** verwerven in gedrag van lineaire elektrische netwerken
- Electriteit met de **visie van een ingenieur**
- Lineaire netwerken: netwerken met bronnen, weerstanden, spoelen, condensatoren
- Geen fysica van de componenten
- Wel gebruik van fysica om met elektrische netwerken te kunnen omgaan
- **Oefeningen !!**

# Uiteindelijk gaat het hierover ...





Don't try this at home ... (yet)

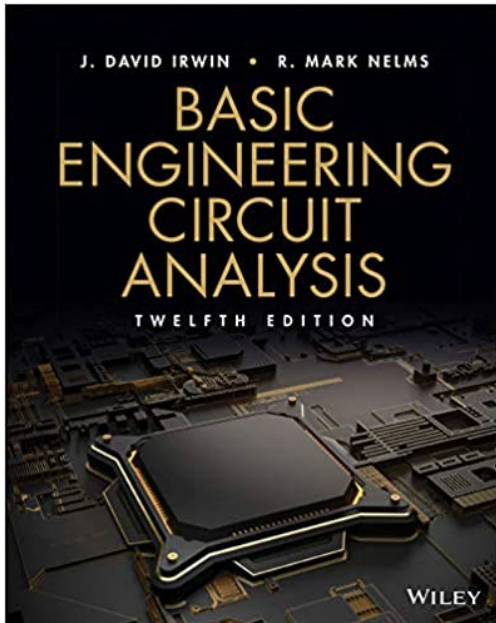


we vertrekken hier van de theorie.  
We proberen de link te leggen met real life electronics

- Deel 1: 'DC' Gelijkspanning en stroom
  - Hoofdstuk 1: basisbegrippen
  - Hoofdstuk 2: Resistieve circuits
  - Hoofdstuk 3: Knooppuntsanalyse
  - Hoofdstuk 4: Operationele versterkers
  - Hoofdstuk 5: Extra analysetechnieken
- Deel 2: 'AC' Wisselspanning en stroom
  - Hoofdstuk 6: Condensatoren en spoelen
  - Hoofdstuk 7: Eerste en tweede orde circuits
  - Hoofdstuk 8: AC analyse in regime toestand
  - Hoofdstuk 12: AC analyse met variabele frequentie

(De nummering van de hoofdstukken volgt die van het boek)





Irwin J., Nelms M.,  
“Basic circuit engineering analysis.  
**12th Edition.**”, Wiley

- Edition 11 is zeker nog bruikbaar maar de oplossingen van de oefeningen bij 12 zouden veel beter zijn ...
- Als er nieuwe oefeningen aangepakt worden ga ik edition 12 gebruiken

- Eigenlijk zijn dit lessen
- Lessen waarin we samen oefeningen gaan maken
- Sluiten nauw aan bij de oefeningen van het examen

- Er is geen extra leerstof in de oefenzittingen.
- 4 oefenzittingen per reeks
  - Oef. 1: resistieve netwerken
  - Oef. 2: nodale analyse
  - Oef. 3: eerste en tweede orde netwerken
  - Oef. 4: complexe impedanties en bode diagramma's
- De oefenzittingen zijn opgebouwd rond het gebruik van een netwerk simulator (LTSPICE) en een aantal praktische experimenten.
- Bedoeling: laten zien dat elektronica over echte schakelingen gaat. Schakelingen die je kunt ontwerpen, simuleren, uitmeten, testen, ...

- Slides van vorig jaar
  - Werden gebruikt in de opnames van de lessen
- Slides van dit jaar
  - Niet afprinten. Worden verkocht door VTK
  - Eventuele updates en correcties worden hierbij gezet
- Opnames van de lessen van dit jaar.
  - Worden gepost na de les. As is.
  - Voor werksittingen kant dit wat chaotisch zijn.
- Screencasts en oneNote sheets van heel wat oefeningen
- Opgaven oefenzittingen
- Modelexamen als het zover is

- Het belangrijkste van deze cursus is **inzicht**, geen loutere reproductie van kennis
- Oefeningen zijn het belangrijkste
- Oefeningen examen
- Multiple choice, 20 vragen. Duur 3h
- Voorbeeld zal ter beschikking gesteld worden rond Pasen
- Details in laatste les

## We gaan eraan beginnen!

- Deel 1: ‘DC’ Gelijkspanning en stroom
- Hoofdstuk 1: Basisbegrippen
  - [Inleiding]
  - Basisbegrippen
  - Circuit elementen

- Het DC deel van de cursus gaat snel vooruit
- Basisbegrippen en methodes.
- Op zich niet zo moeilijk maar wel essentieel om de latere hoofdstukken te kunnen begrijpen
- Mis de trein niet!

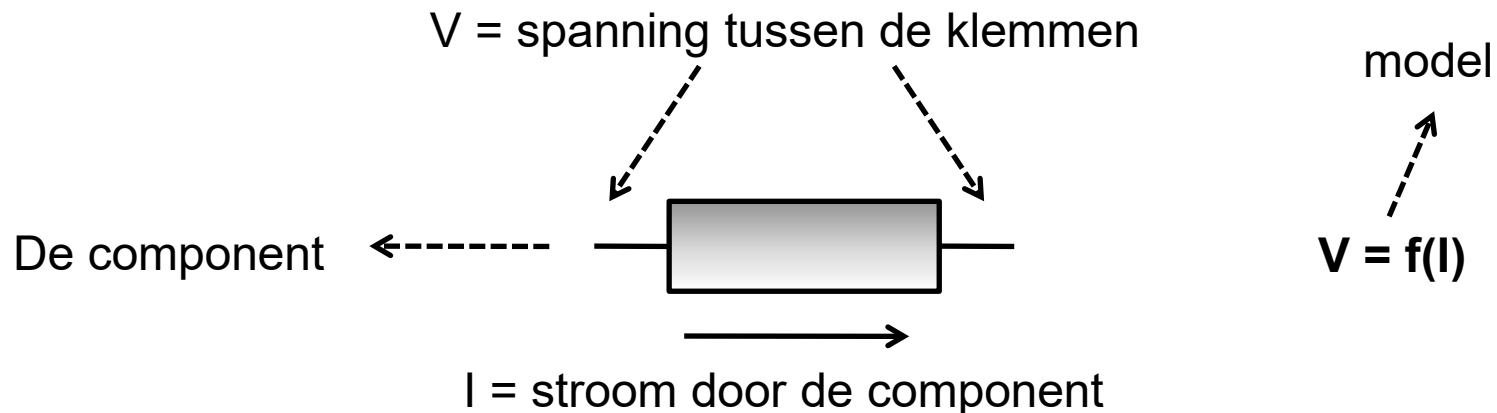


## ■ Circuit

- aaneenschakeling van elektrische componenten
- iedere component wordt beschreven door een wiskundig model

## ■ Model

- Geeft het verband aan tussen de elektrische stroom door een component en de spanning over de component



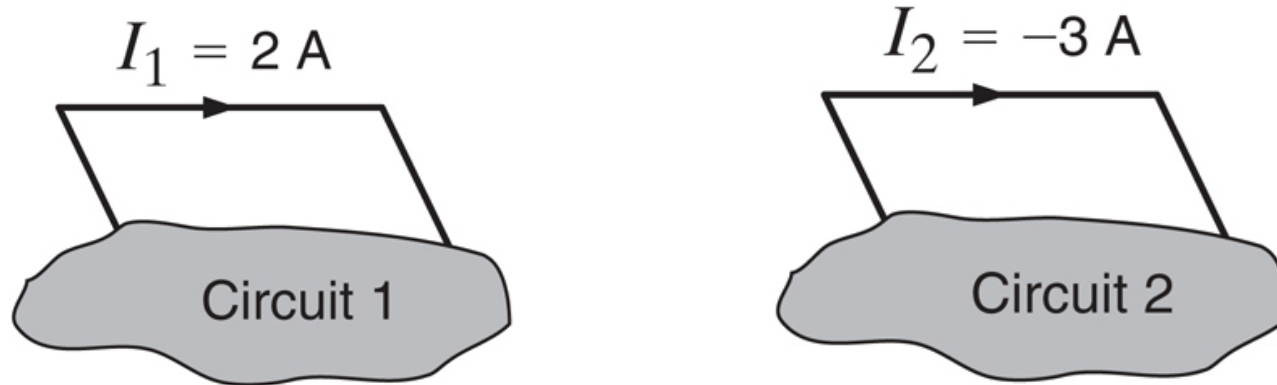


- Basisbeginsel van elektriciteit is elektrische lading  $q$
- In circuits is de lading in beweging
- Bewegende elektrische lading  $\rightarrow$  Elektrische stroom

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ of } q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

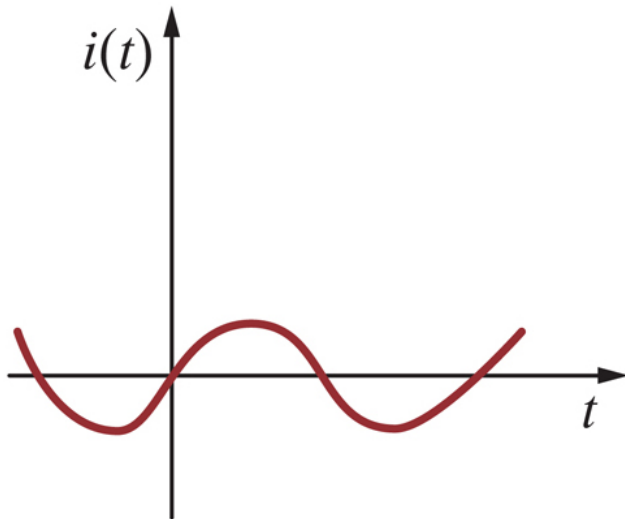
- Eenheden
  - Lading in 'C' Coulomb
  - Stroom in 'A' Ampere
  - $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$

- Tekenenconventie

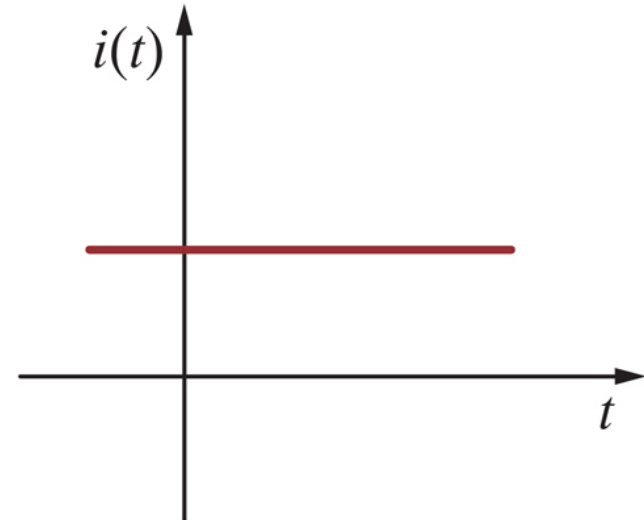


De pijl geeft aan wat we een positieve stroom noemen  
Als de stroom negatief is loopt ze dus tegen de pijl in

Opmerking: fysisch gezien gaat het dikwijls om negatief geladen elektronen die zich verplaatsen. We redeneren echter altijd met positieve ladingen



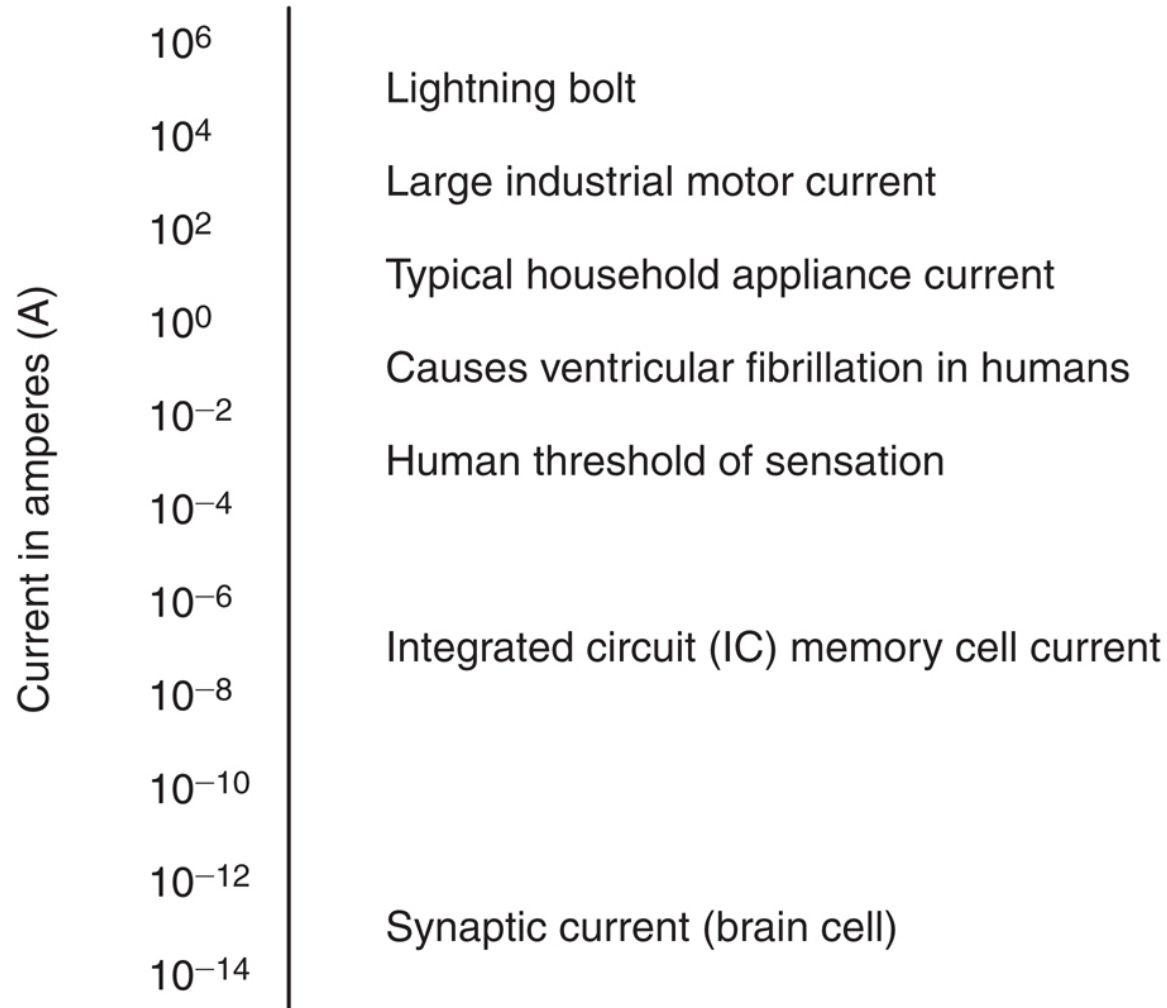
AC = Alternating Current  
Wisselstroom



DC = Direct Current  
Gelijkstroom

We praten over AC stroom/spanning voor variërende stroom/spanning en DC stroom/spanning voor constante stroom/spanning

# Hoe groot zijn stromen ?

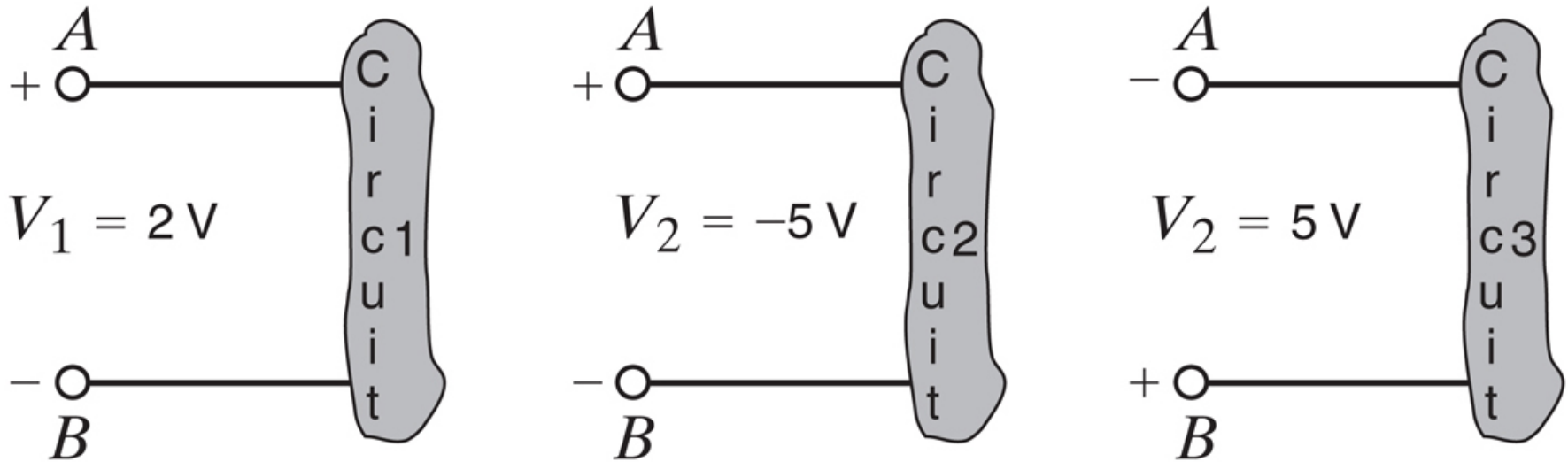


- Bewegende ladingen hebben een zekere energie
- **Spanningsverschil** of kortweg de **spanning** tussen twee punten a en b
  - De arbeid nodig om een positieve eenheidslading van punt a naar b te brengen

$$v = \frac{dw}{dq}$$

- Het spanningsverschil doet de ladingen bewegen.
- Eenheden
  - Energie in 'J' Joule
  - Elektrische spanning in 'V' Volt
  - $1 \text{ V} = 1 \text{ J} / \text{C}$

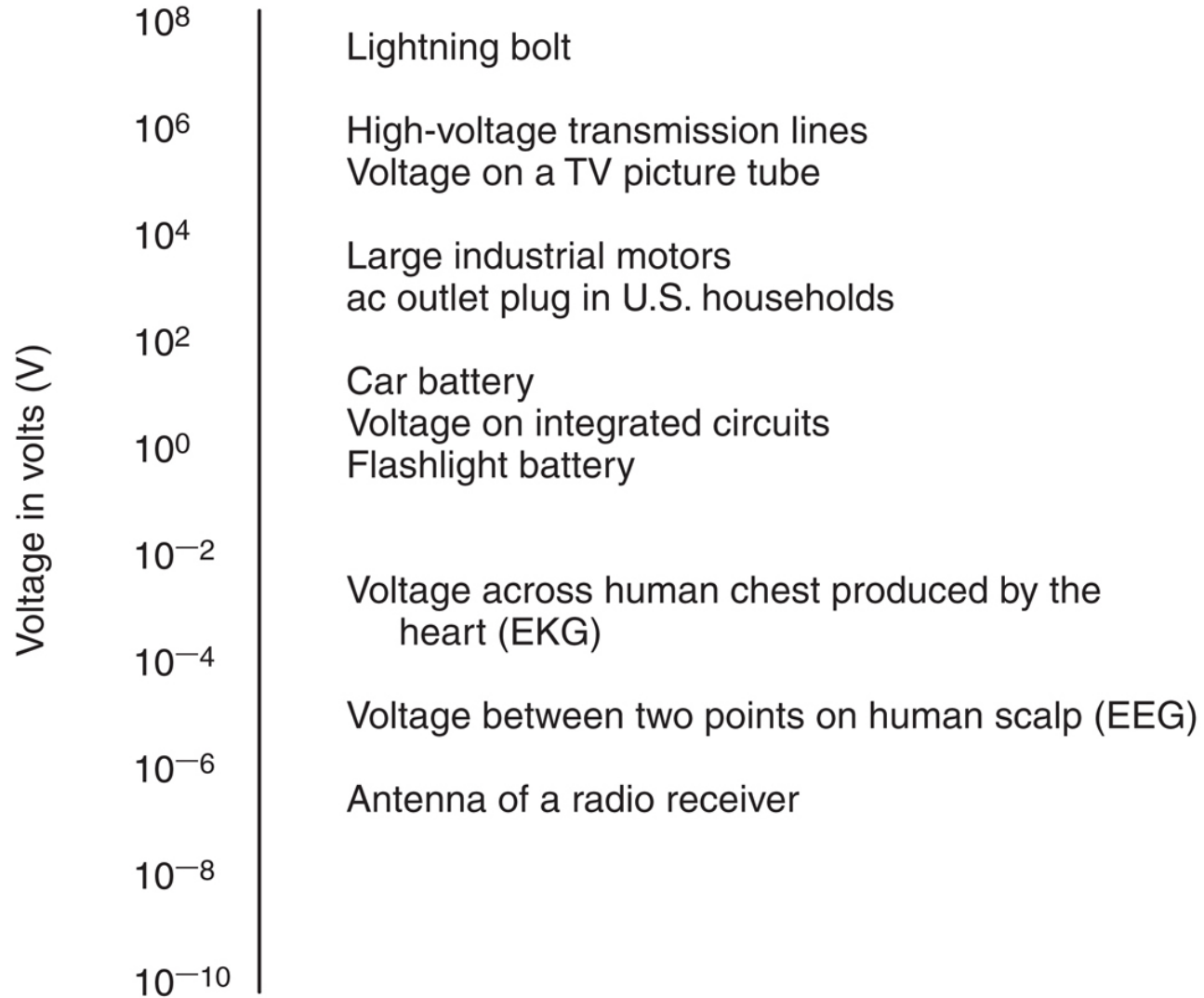
## ■ Tekenconventie



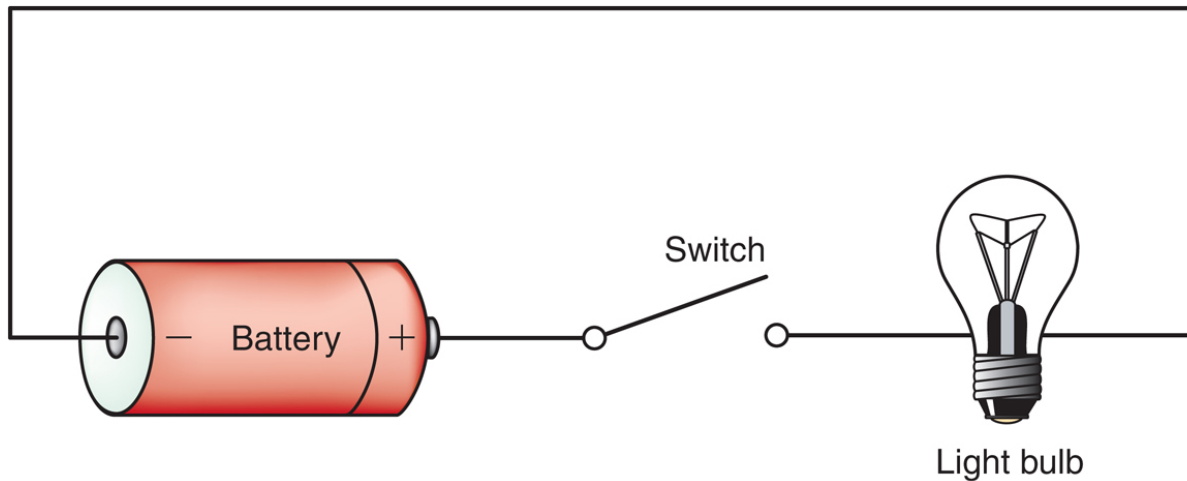
+ en – teken geven aan welke kant de hoogste spanning heeft voor een positieve spanning.

Bij een negatieve spanning is de – dus het hoogst

# Hoe groot zijn spanningen ?

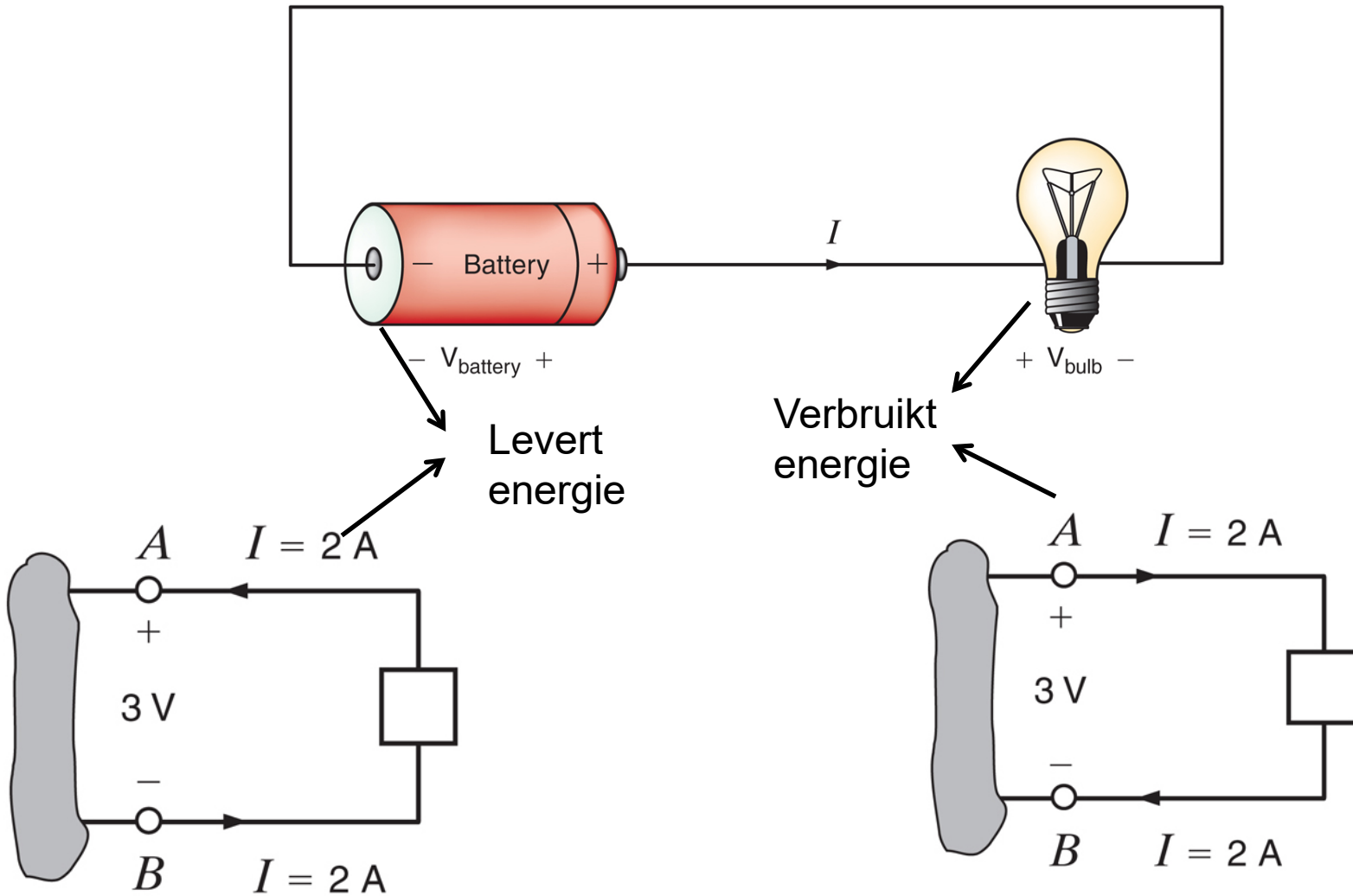


# Een eerste circuit: de zaklantaarn!



- De lamp zet elektrische energie om in warmte en licht  
→ lading verliest elektrische energie in de lamp
- De batterij zet energie chemische energie om in elektrische energie  
→ lading wint elektrische energie in de batterij





- Even rekenen

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (\text{definitie } v)$$

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{definitie } i)$$

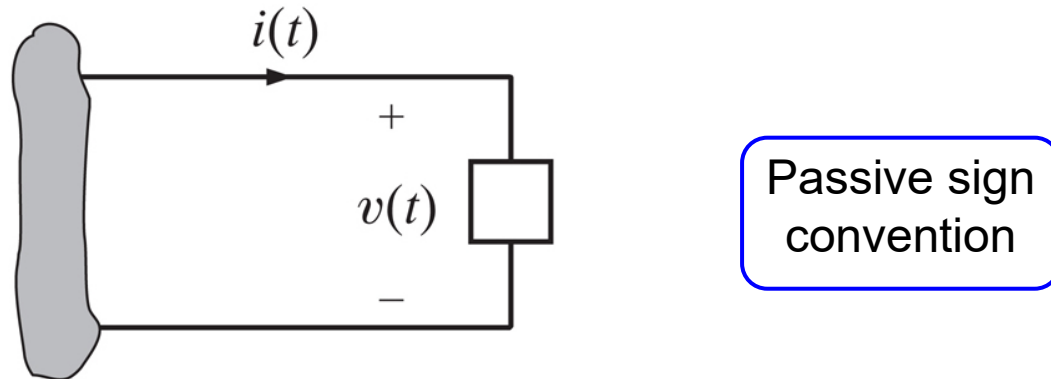
$$v \cdot i = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = p \rightarrow \text{Dit is een vermogen}$$

- Vermogen is het energieverbruik per eenheid van tijd
- Eenheden
  - Vermogen in Watt
  - 1 Watt is 1 J / s



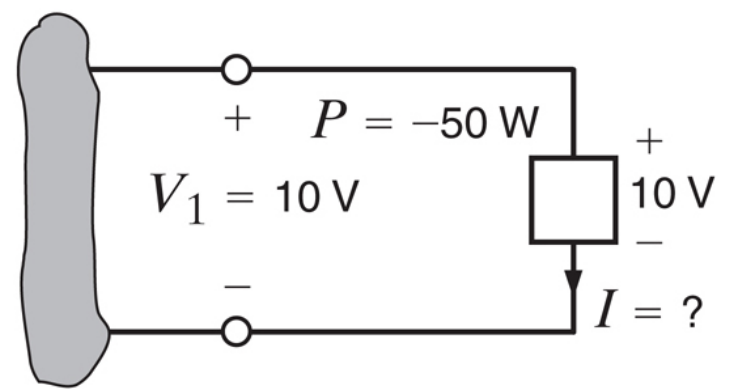
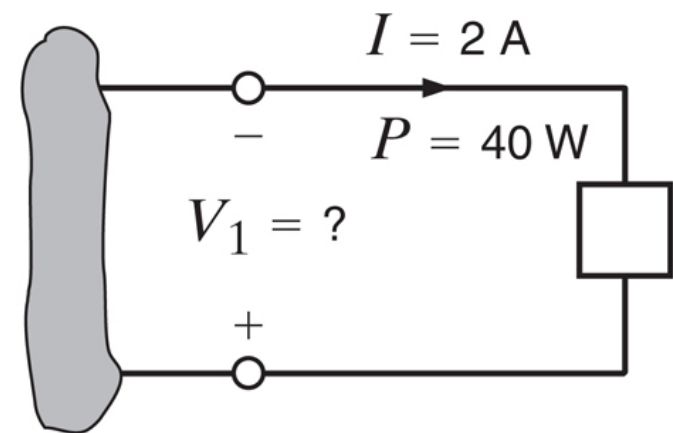
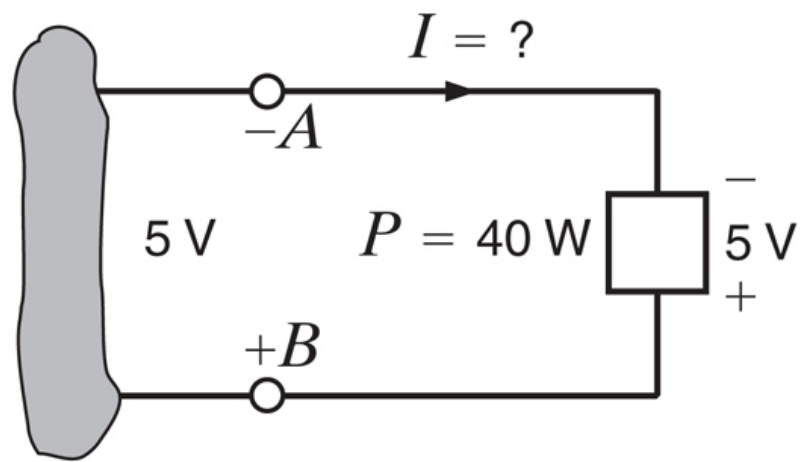
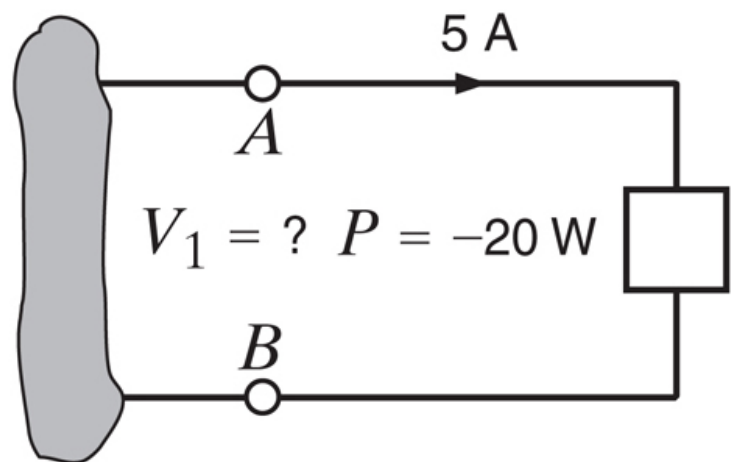
## ■ Tekenconventie

- We spreken af dat we de stroom de component laten invloeden aan de '+' klem

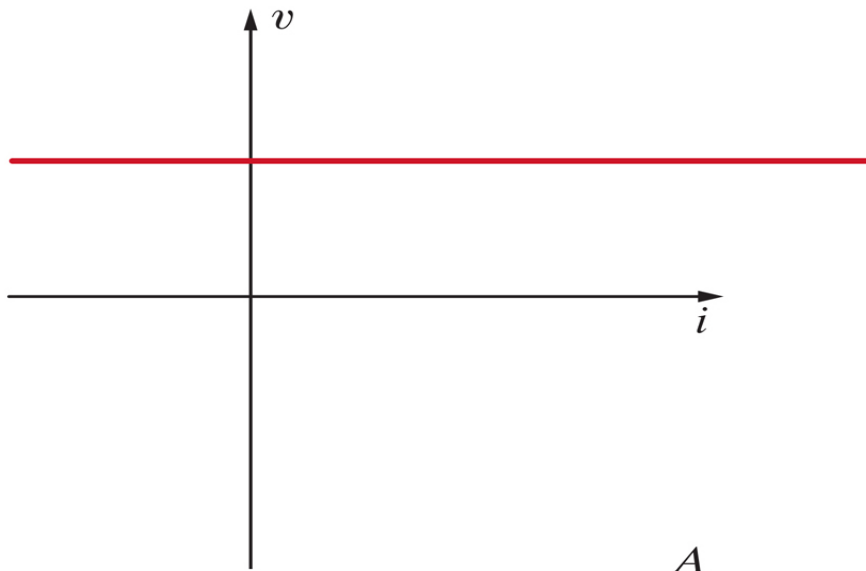


## ■ In dat geval

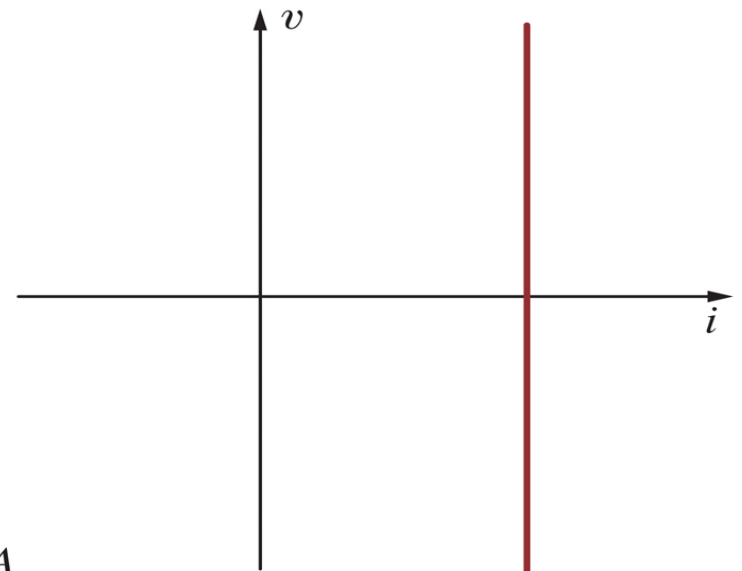
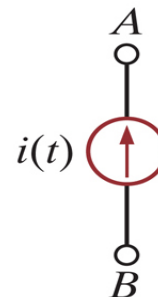
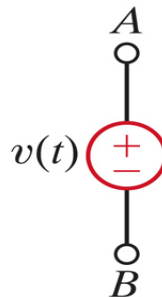
- $p = v i > 0 \rightarrow$  passieve component  $\rightarrow$  verbruikt energie
- $p = v i < 0 \rightarrow$  actieve component  $\rightarrow$  levert energie
- Er is behoud van energie/vermogen (Tellegen)



Eerste elementaire circuit elementen: onafhankelijke V en I bron

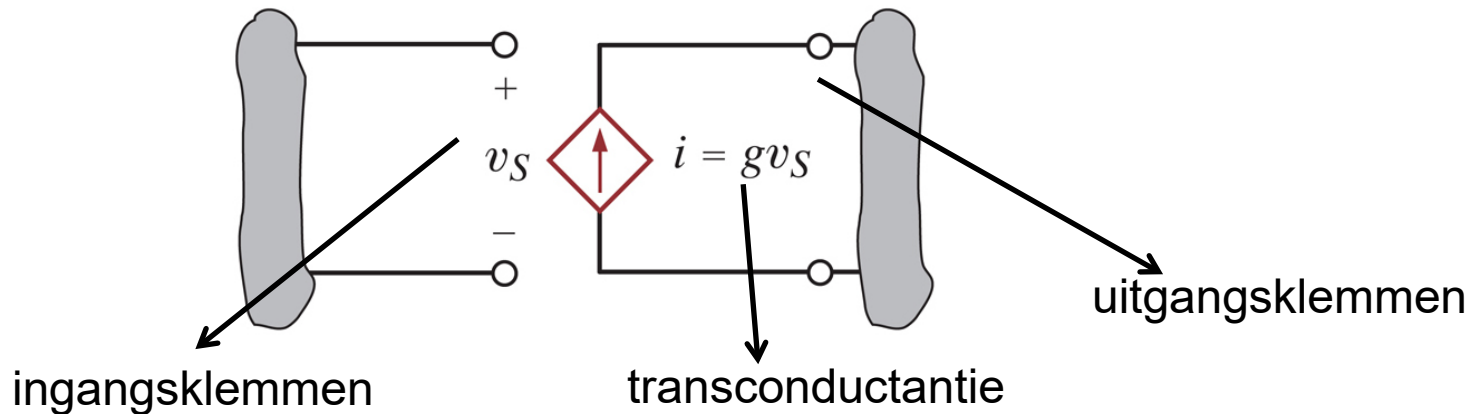


Spanningsbron

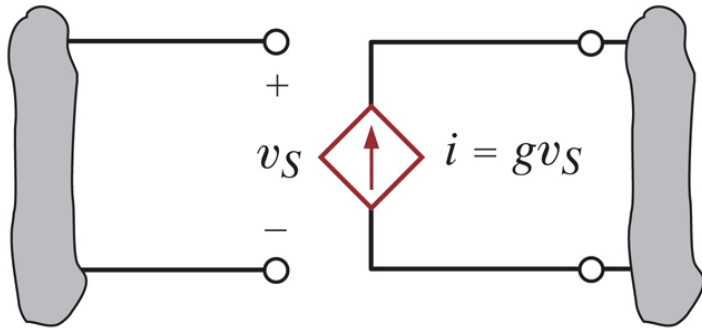


Stroombron

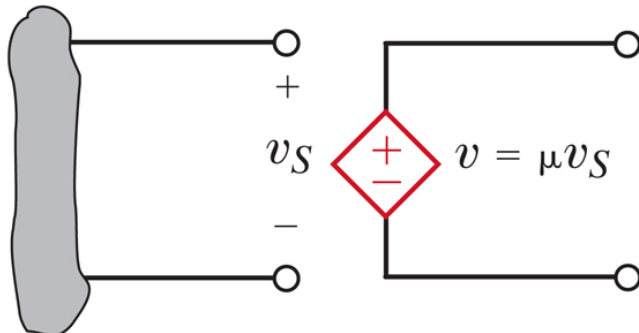
- Spanningsafhankelijke stroombron
- Nieuw soort element:
  - 4 klemmen
  - Uitgangsklemmen gedragen zich als een stroombron
  - De waarde van de stroom wordt bepaald door de ingangsklemmen via een transconductantie in Siemens ( $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$ , zie later)



## ■ Twee spanningsafhankelijke bronnen

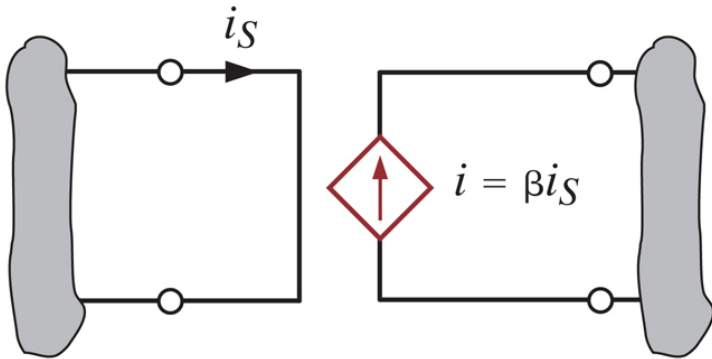


- Spanningsafhankelijke stroombron
  - Voltage Controlled Current Source
  - VCCS – VDI
  - $g$ : Transconductance, transconductantie

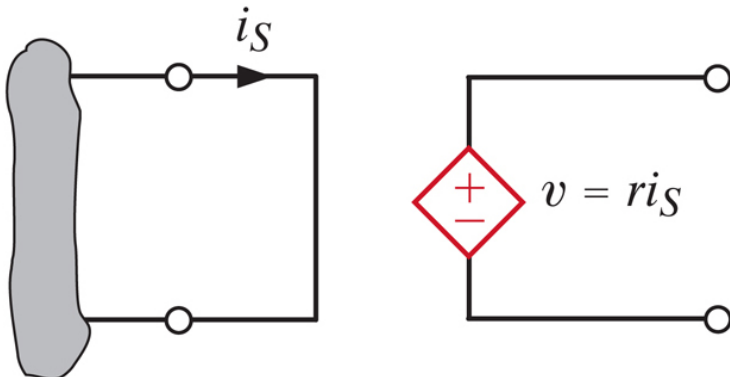


- Spanningsafhankelijke spanningsbron
  - Voltage Controlled Voltage Source
  - VCVS – VDV
  - $\mu$ : Voltage gain, (spannings)versterking

- Twee stroomafhankelijke bronnen



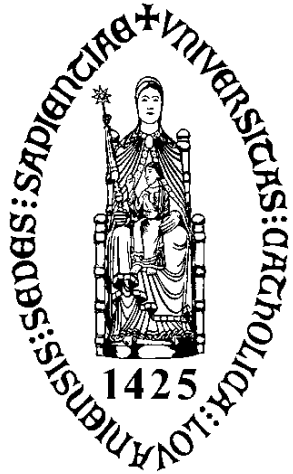
- Stroomafhankelijke stroombron
  - Current Controlled Current Source
  - CCCS – IDI
  - $\beta$ : Current gain, (stroom)versterking



- Stroomafhankelijke spanningsbron
  - Current Controlled Voltage Source
  - CCVS – IDV
  - $r$ : transresistance



- Chapter 1 – Basic concepts
  - Volledig gezien



# H01Z2

## Elektrische netwerken

## Hoofdstuk 2

### Resistieve netwerken

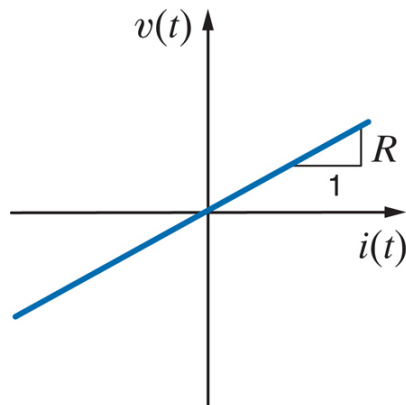
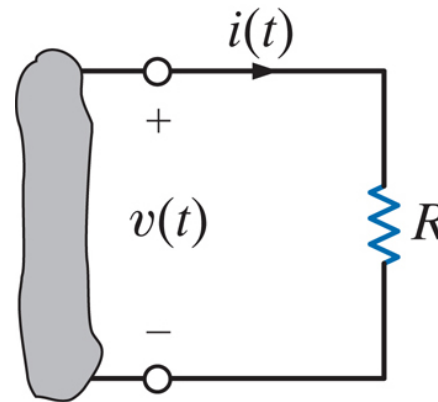
W. Dehaene

---

- Ohm, Kirchhoff en enkele eenvoudige circuits
- Serie en parallelschakeling van weerstanden
- Circuits met afhankelijke bronnen
- Voorbeelden

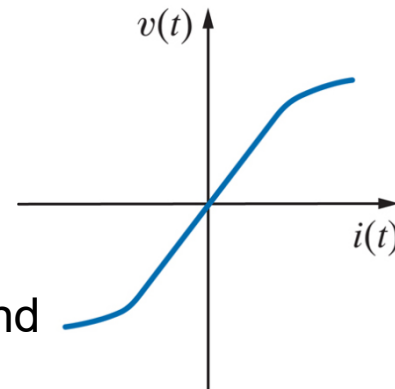
- Ohm = het verband tussen spanning over een weerstand en de stroom erdoor

- $v(t) = R i(t)$  met  $R \geq 0$



$R$  is constant  
Lineaire weerstand

$R = f(i)$   
Niet Lineaire weerstand



- Vermogen

$$p(t) = i(t) \cdot v(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

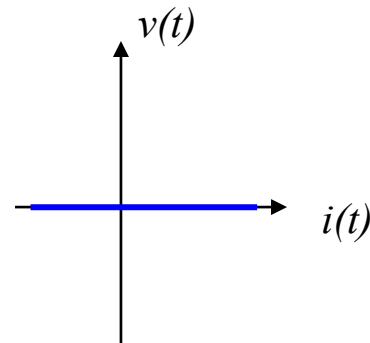
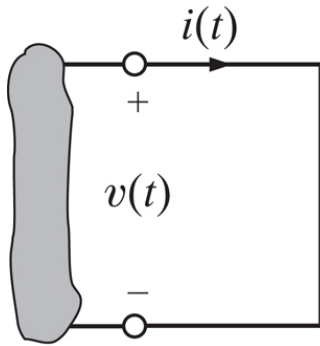
- Conductantie

$$G = \frac{1}{R}$$

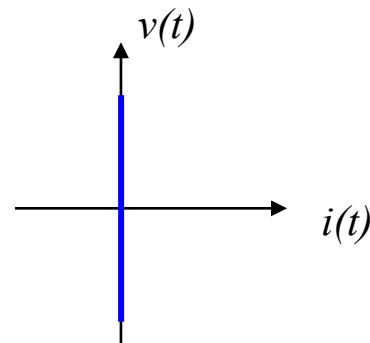
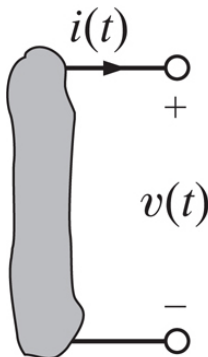
- Eenheden

- Weerstand in  $\Omega$  (ohm),  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$
- Conductantie in S (siemens),  $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$

- $R=0 \rightarrow$  kortsluiting  $\rightarrow v(t) = 0 \text{ V}$ ,  $i(t) = ? \rightarrow$  ideale geleider



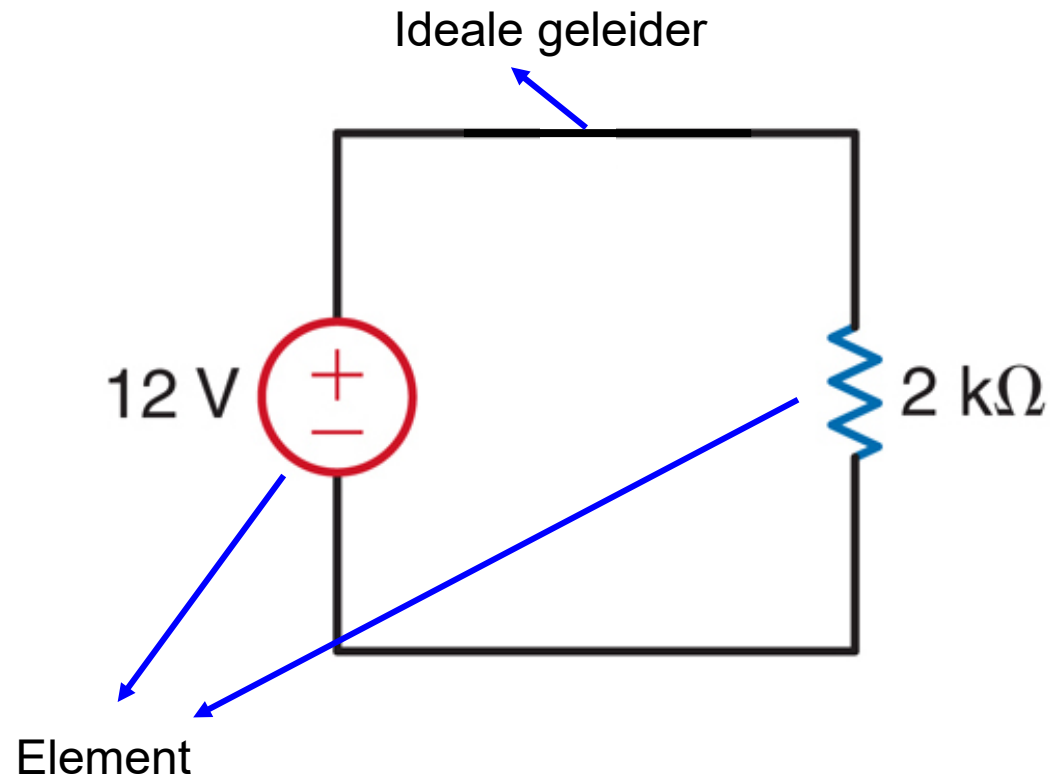
- $R=\infty \rightarrow$  open keten  $\rightarrow i(t) = 0 \text{ A}$ ,  $v(t) = ? \rightarrow$  ideale isolator



- Lumped circuit approach:
  - Circuit = elementen + ideale geleiders ertussen ( $R=0$ )
  - Benadering !

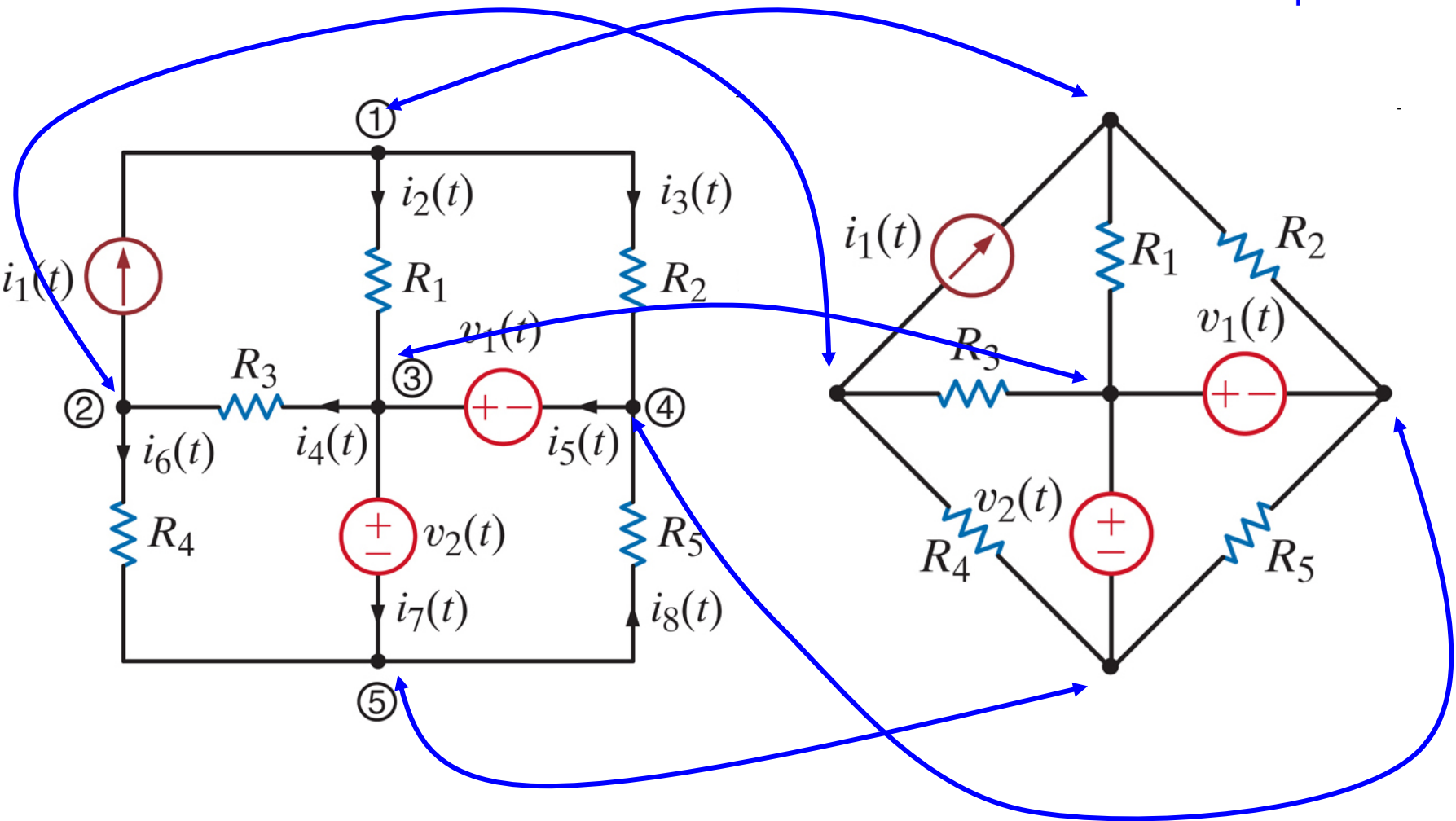
- Definities

- Knoop (node)
- Tak (branch)
- Lus (loop)

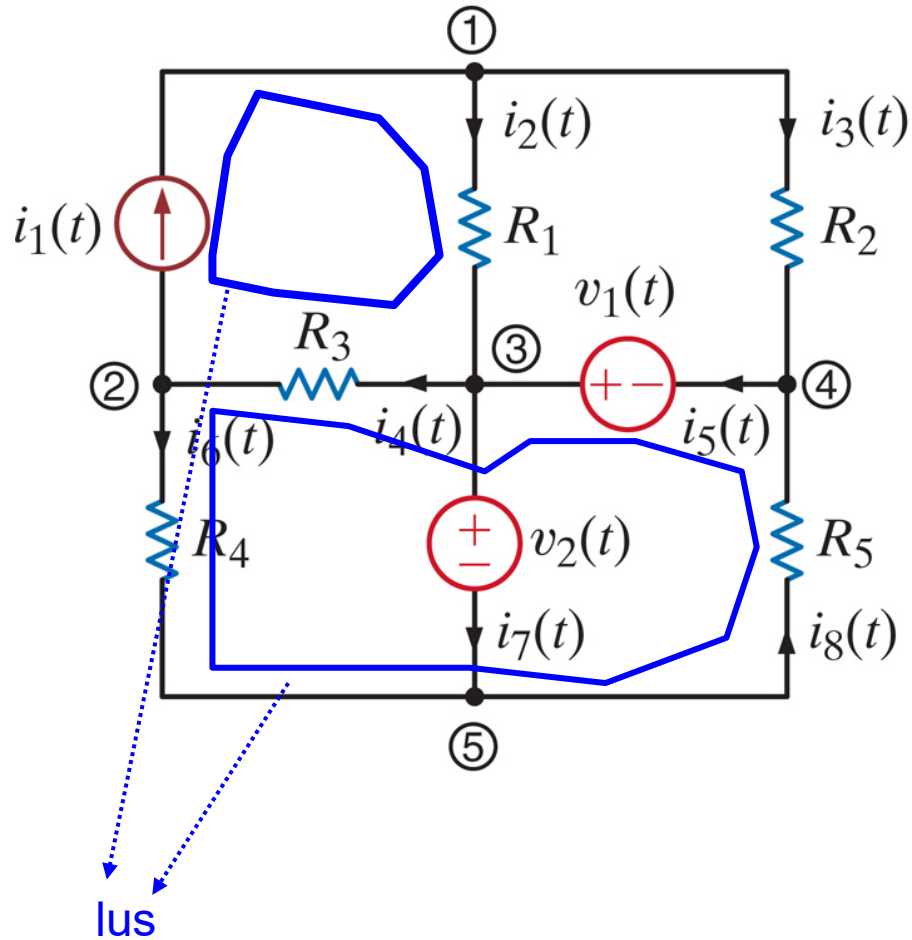


- 2x hetzelfde circuit !!

5 knopen !

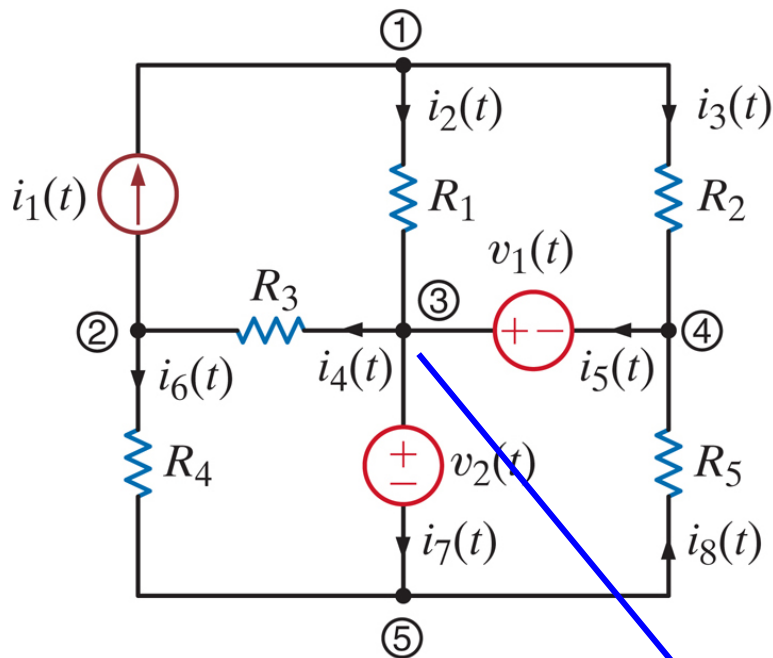






- Tak: één enkel element tussen twee knopen (er zijn er acht)
- Lus: een gesloten pad doorheen het circuit

- Kirchhoff's current law (KCL): de algebraïsche som van de stromen die naar een knoop vloeien is 0

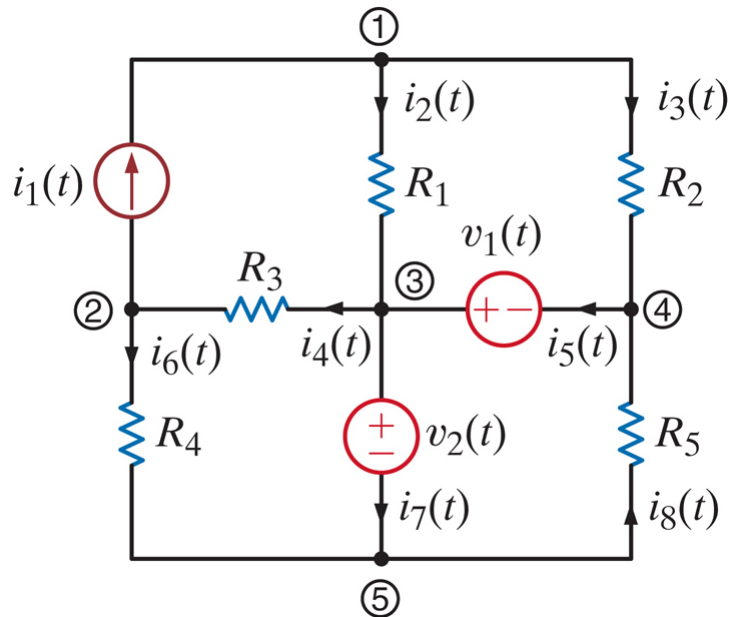


$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0$$

$$i_2(t) - i_4(t) + i_5(t) - i_7(t) = 0$$

inkomende stromen +, weggaande stromen –  
(mag ook omgekeerd)

# Voorbeeld: alle KCL vergelijkingen (I)



$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad (1)$$

$$i_1(t) - i_4(t) + i_6(t) = 0 \quad (2)$$

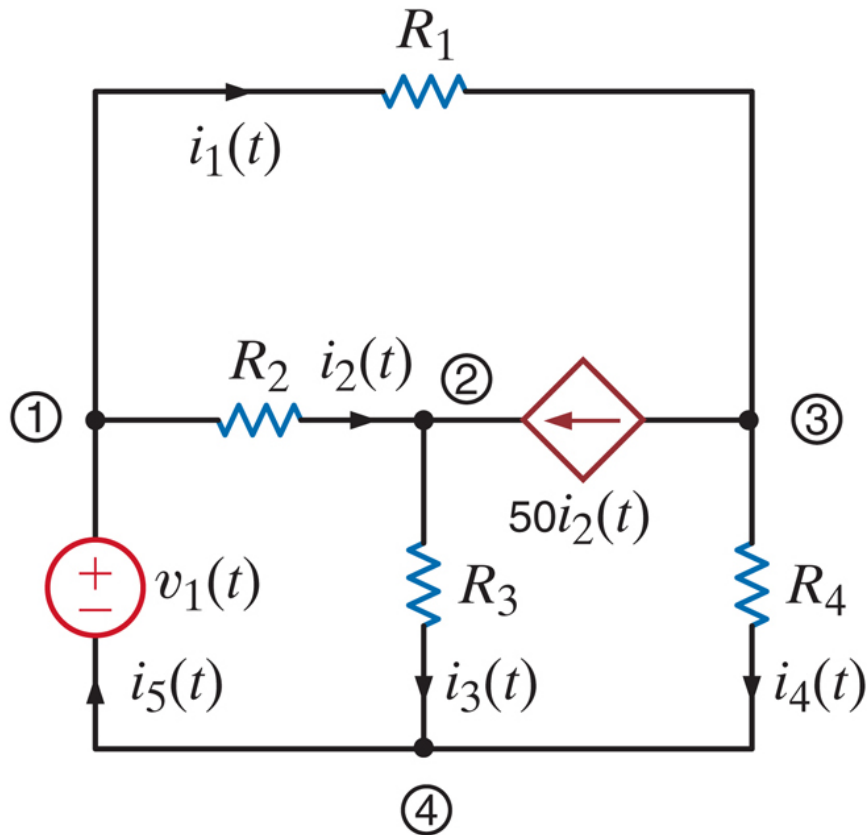
$$-i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) = 0 \quad (3)$$

$$-i_3(t) + i_5(t) - i_8(t) = 0 \quad (4)$$

$$-i_6(t) - i_7(t) + i_8(t) = 0 \quad (5)$$

De 5e vergelijking is de som van de eerste 4!  
Niet lineair onafhankelijk

# Voorbeeld: alle KCL vergelijkingen (II)



$$i_1(t) + i_2(t) - i_5(t) = 0 \quad (1)$$

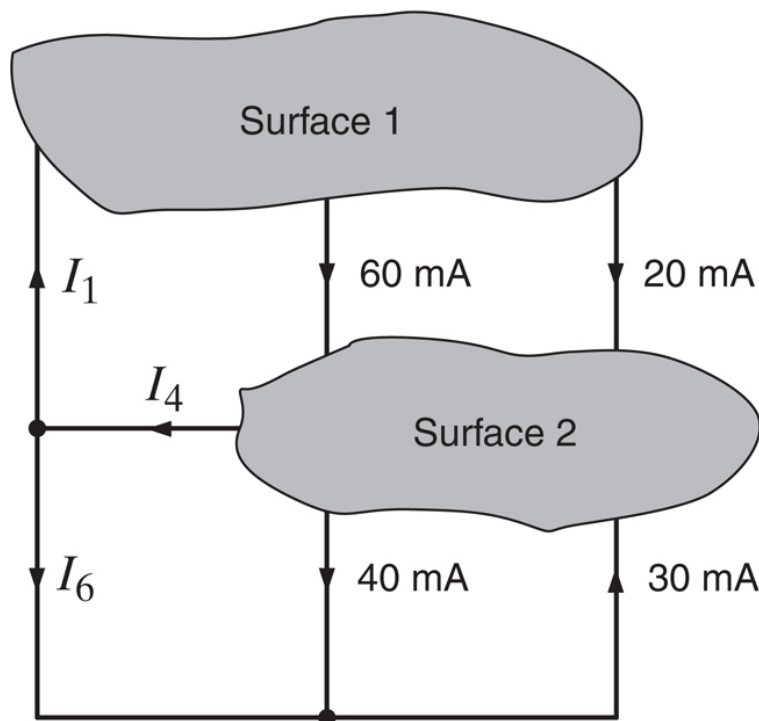
$$-i_2(t) + i_3(t) - 50i_2(t) = 0 \quad (2)$$

$$-i_1(t) + 50i_2(t) + i_4(t) = 0 \quad (3)$$

$$i_5(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0 \quad (4)$$

Weer niet lineair onafhankelijk...

- De algebraïsche som van de stromen die in een gesloten oppervlak binnenvloeien is 0
- Het oppervlak (surface) is een “superknoop”



Surface 1

$$I_1 - 0.06 - 0.02 = 0$$

$$I_1 = 0.08 = 80 \text{ mA}$$

Surface 2

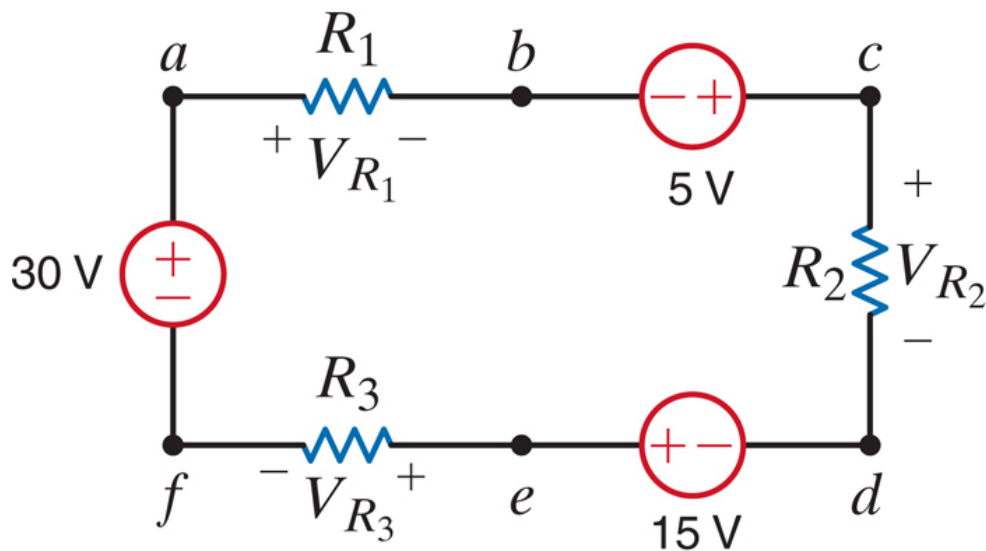
$$-I_4 + 0.06 + 0.02 + 0.03 - 0.04 = 0$$

$$I_4 = 0.07 = 70 \text{ mA}$$

- Stroom = bewegende lading
- KCL is de circuit vertaling van behoud van lading
- Zolang KCL gerespecteerd wordt in een knoop verdwijnt er geen lading in die knoop en ontstaat er geen lading in die knoop
- Iets anders zou fysisch onmogelijk zijn ....

# De spanningswet van Kirchhoff

- Kirchhoff's voltage law (KVL): de algebraïsche som van de spanningen in een lus is 0

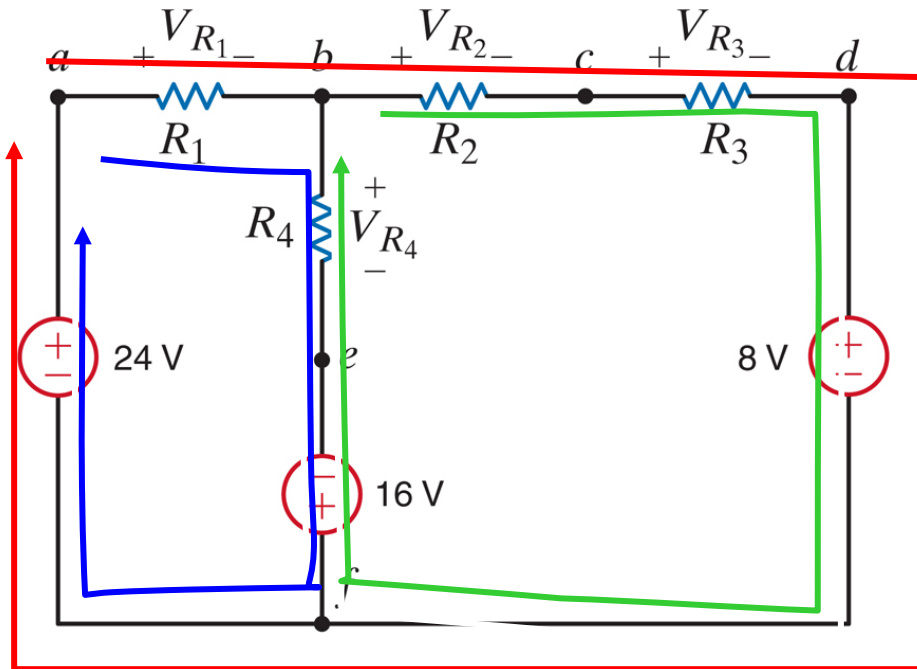


$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0$$

$$+V_{R_1} - 5 + V_{R_2} - 15 + V_{R_3} - 30 = 0$$

Dalende spanning langs de lus is +,  
 Stijgende spanning is -.  
 Het kan ook omgekeerd ...

# Voorbeeld: geef alle KVL vergelijkingen



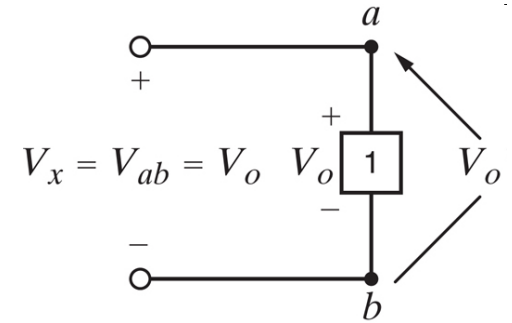
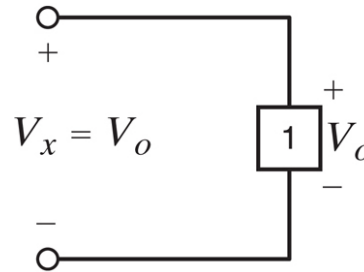
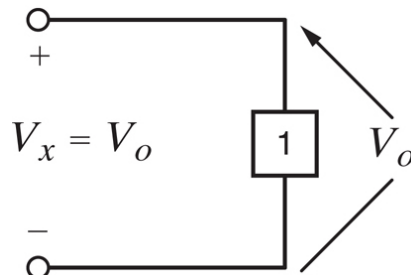
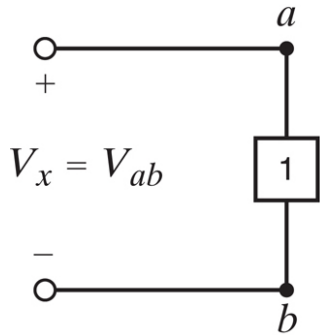
$$V_{R_1} + V_{R_4} - 16 - 24 = 0$$

$$V_{R_2} + V_{R_3} + 8 + 16 - V_{R_4} = 0$$

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + 8 - 24 = 0$$

Weer niet lineair onafhankelijk...

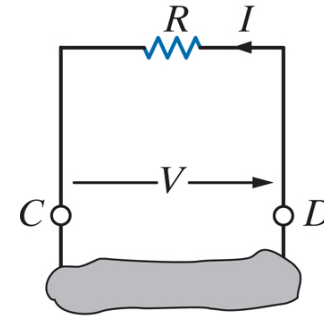
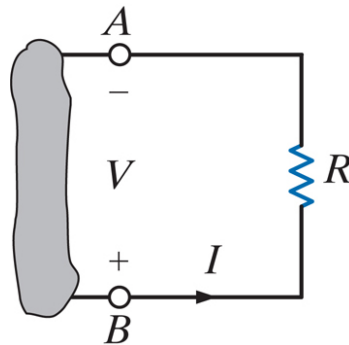
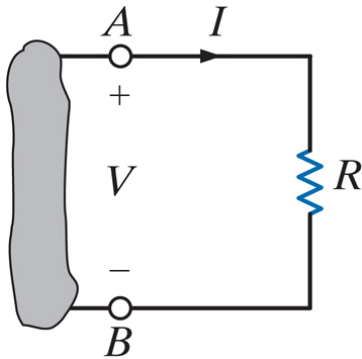




## ■ Verschillende conventies

- Pijlen wijzen naar de positieve kant
- Pijlen zijn nuttig als de twee punten verder uiteen liggen +/- is dan eerder verwarrend

- Wet van Ohm:  $V = R \cdot I$
- Door weerstanden vloeit de stroom van hoge naar lage spanning!



- Deze 3 figuren zijn ok wat tekens betreft. Als je  $V$  of  $I$  omdraait is de wet van Ohm  $V = -R \cdot I$ , als je beide omdraait klopt het weer
- $|V| = R \cdot |I|$  is altijd juist.
- Tip: reken bij de wet van Ohm met positieve spanningen en stromen. Kies een richting voor  $V$  of  $I$  en wees dan consequent voor de andere.

Wat is de spanning over de weerstanden  $R_1$  en  $R_2$ ?

KVL

$$-v(t) + v_{R_1} + v_{R_2} = 0$$

$$v(t) = v_{R_1} + v_{R_2}$$

Wet van Ohm

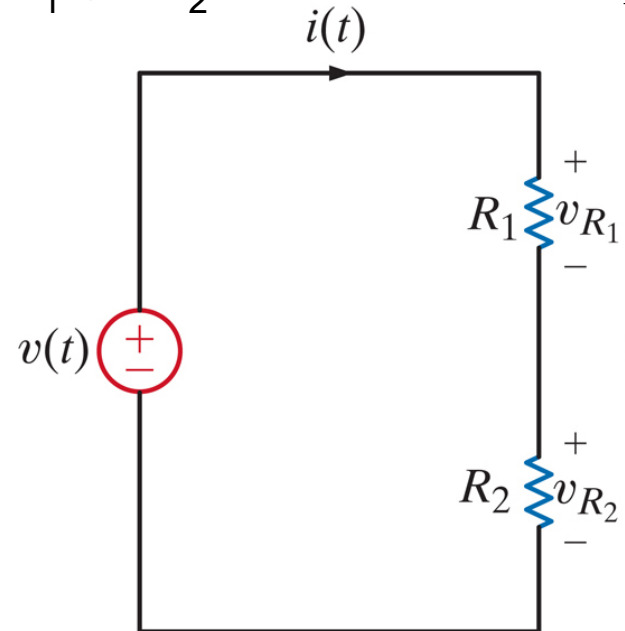
$$v_{R_1} = R_1 i(t) \text{ en } v_{R_2} = R_2 i(t)$$

Invullen in KVL geeft

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t)$$

Oplossen naar  $i(t)$  geeft

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2}$$

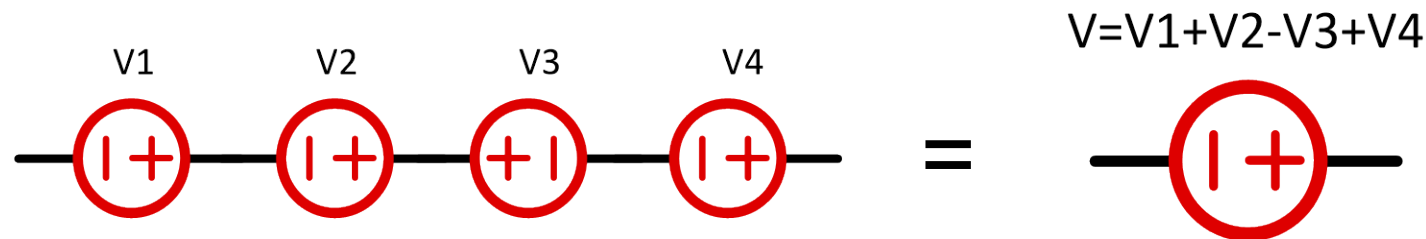


Deze oplossing invullen in de wet van Ohm geeft

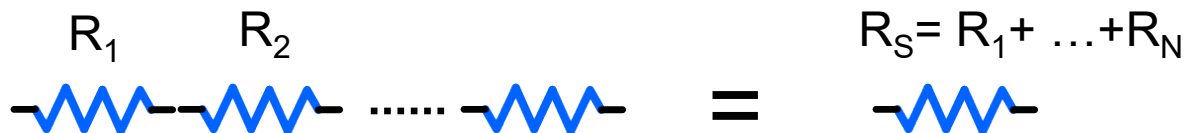
$$v_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) \text{ en } v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t)$$

**Spanningsdeler !**

- Serieschakeling van spanningsbronnen  
→ optellen/aftrekken volgens de spanning



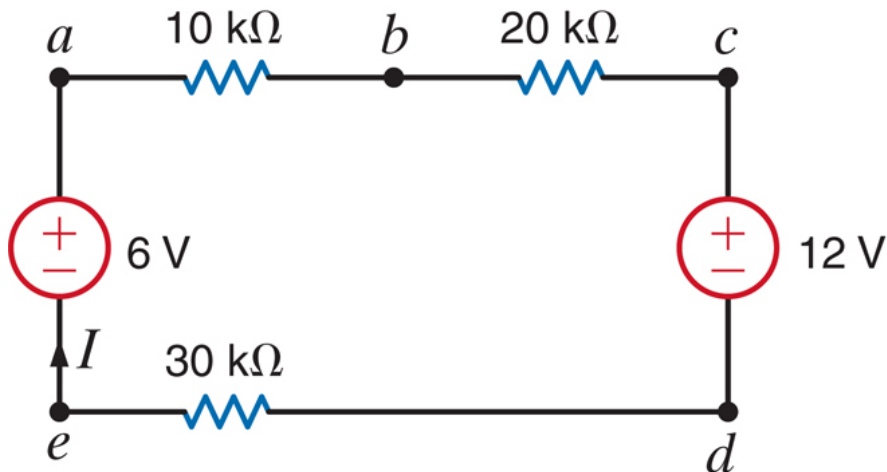
- Serieschakeling van weerstanden → optellen



Opmerking  $R_S > R_i!$

- In een lus zonder vertakkingen kunnen we herschikken.

- Bereken  $I$ ,  $P$  in de  $30k$  weerstand en  $V_{bc}$



1) Stroom  $I$ ?

$$10k \cdot I + 20k \cdot I + 12 + 30k \cdot I - 6 = 0$$

$$60kI = -6$$

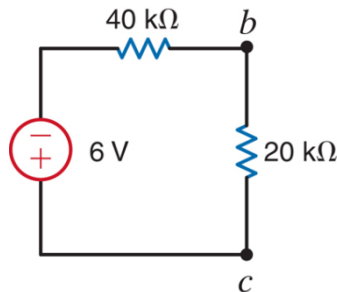
$$I = -0.1mA \text{ (negatief!?)}$$

2) Vermogen  $P$ ?

$$P = RI^2 = 30k \cdot (0.1)^2 = 0.3mW$$

3) Spanning  $V_{bc}$ ?

Hertekenen  $\rightarrow$   
(serie V,R)



Spanningsdeler!

$$V_{bc} = \frac{20k}{20k + 40k} (-6) = -2V$$

Was veel simpeler met Ohm! ☹️

### KCL

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

### Ohm

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2}$$

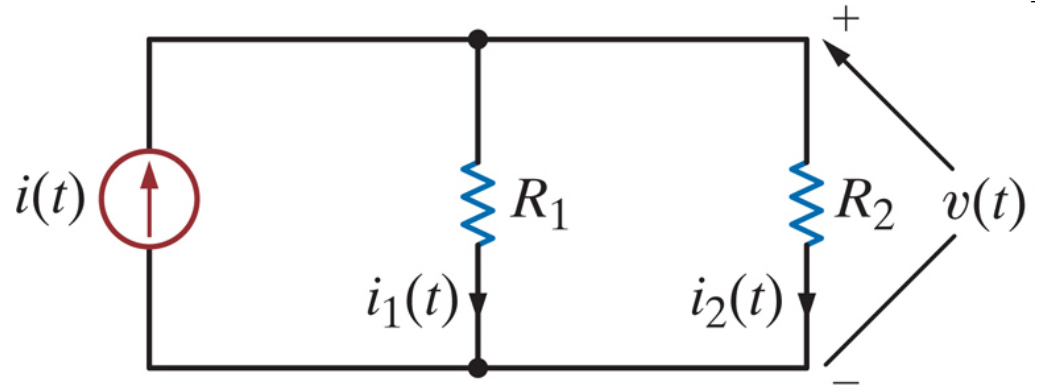
$$i(t) = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R_p} v(t)$$



Equivalentente  
parallel weerstand

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{of} \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$i(t) = \frac{1}{R_p} v(t)$$

$$v(t) = R_p i(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t)$$

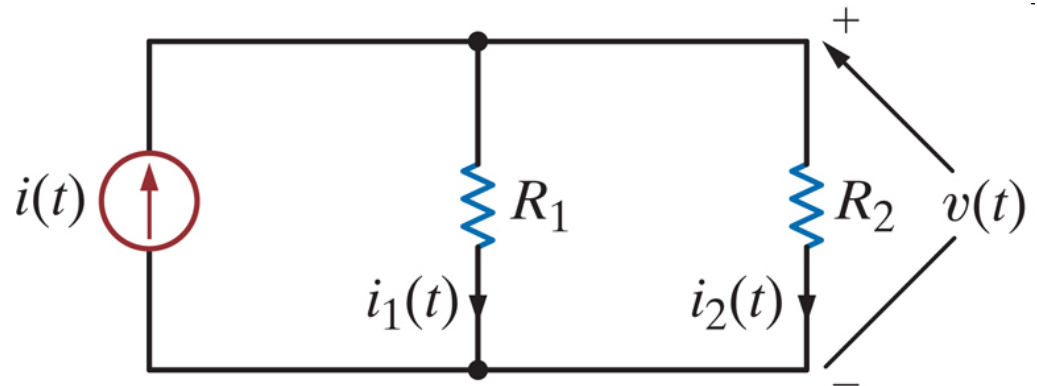
Deelstromen  $i_1, i_2$  ?

$$i_1(t) = \frac{v(t)}{R_1}$$

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t)$$

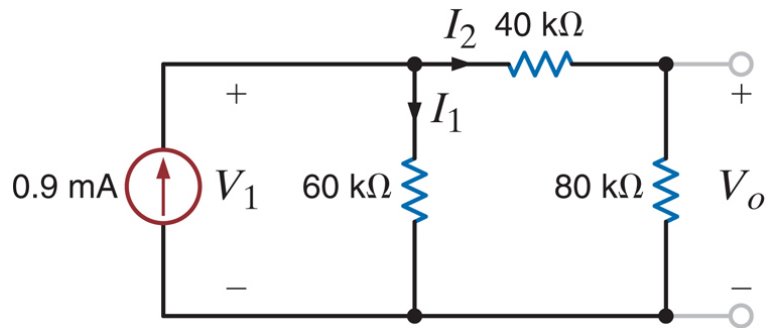
Op dezelfde manier

$$i_2(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t)$$



Stroomdeler: hoe groter een weerstand wordt, hoe minder stroom erdoor vloeit en hoe meer van de totale stroom er dus door de andere weerstand zal vloeien

- Bereken  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $V_o$



$I_1$ ,  $I_2$  via de stroomdelerformule

Serieschakeling!

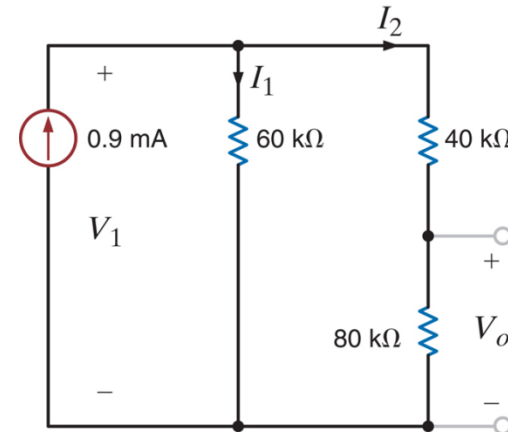
$$I_1 = \frac{(40k + 80k)}{60k + (40k + 80k)} I = 0.6mA$$

$$I_2 = \frac{60k}{60k + (40k + 80k)} I = 0.3mA$$

Nu kan ook  $V_o$  berekend worden

$$V_o = 80k \cdot I_2 = 24V$$

Alternatief:  $V_o$  via spanningsdeling van  $V_1$

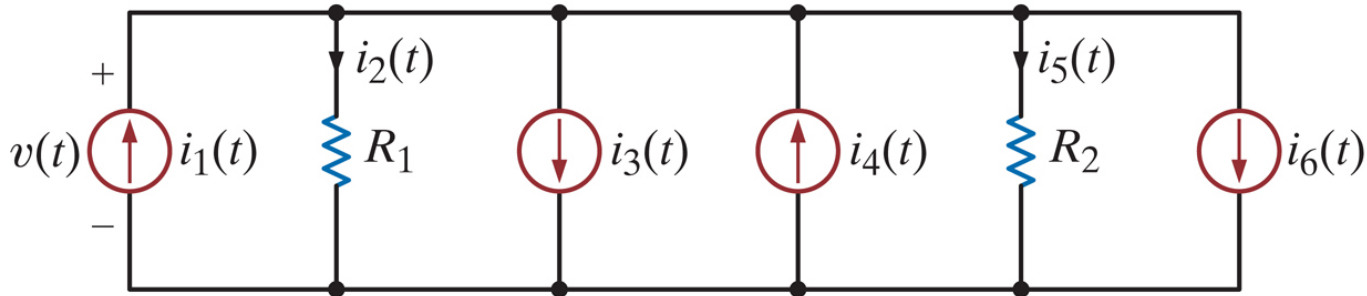


$$V_1 = 60k \cdot I_1 = 36V$$

$$V_o = \left( \frac{80k}{80k + 40k} \right) V_1$$

$$V_o = 24V$$

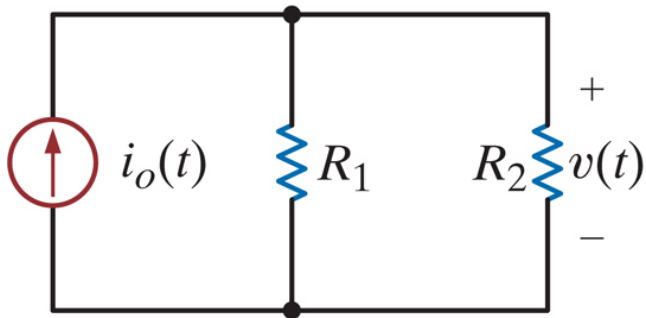




KCL

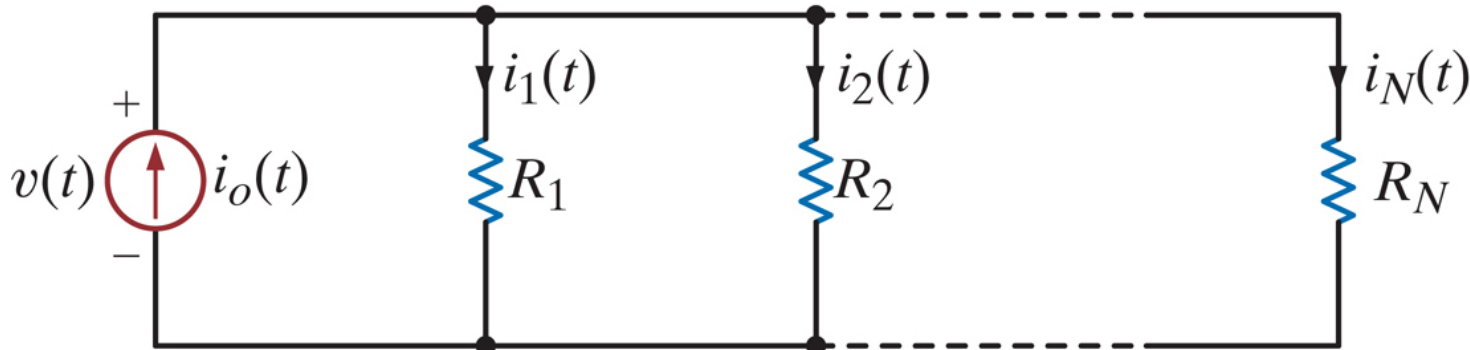
$$\underbrace{i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t)} = i_2(t) + i_5(t)$$

parallele stroombronnen  
→ 1 stroom  $i_o$



Parallele stroombronnen  
Mogen opgeteld worden

# Veralgemening van de parallelschakeling van weerstanden



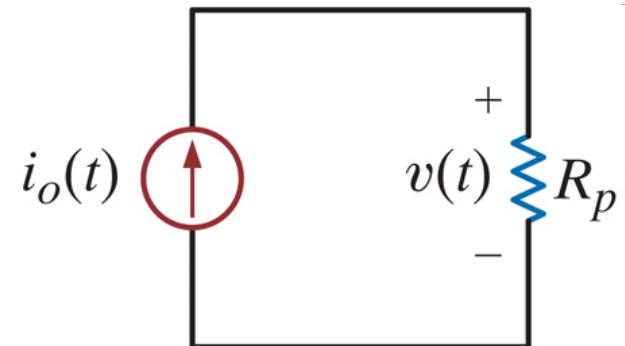
$$i_o(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_N(t)$$

$$i_o(t) = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) v(t)$$

$$i_o(t) = \frac{1}{R_p} v(t)$$

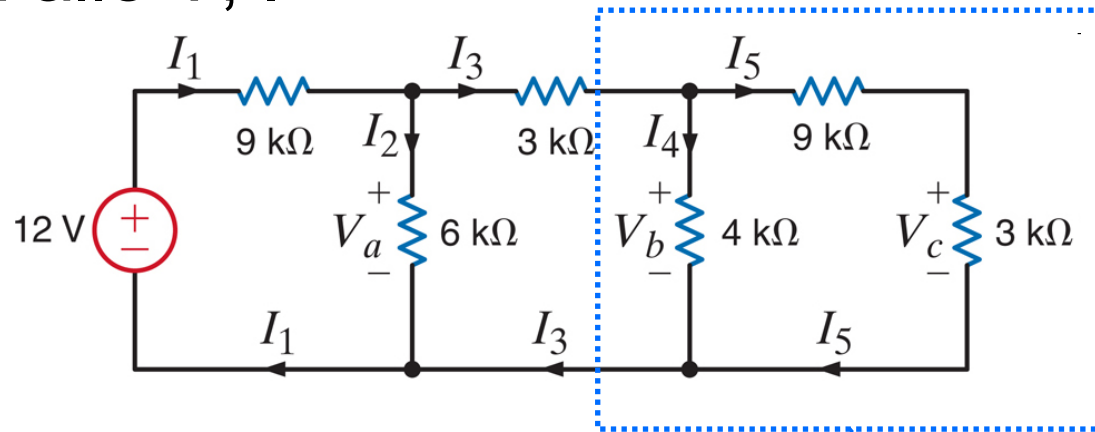
$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Ohm

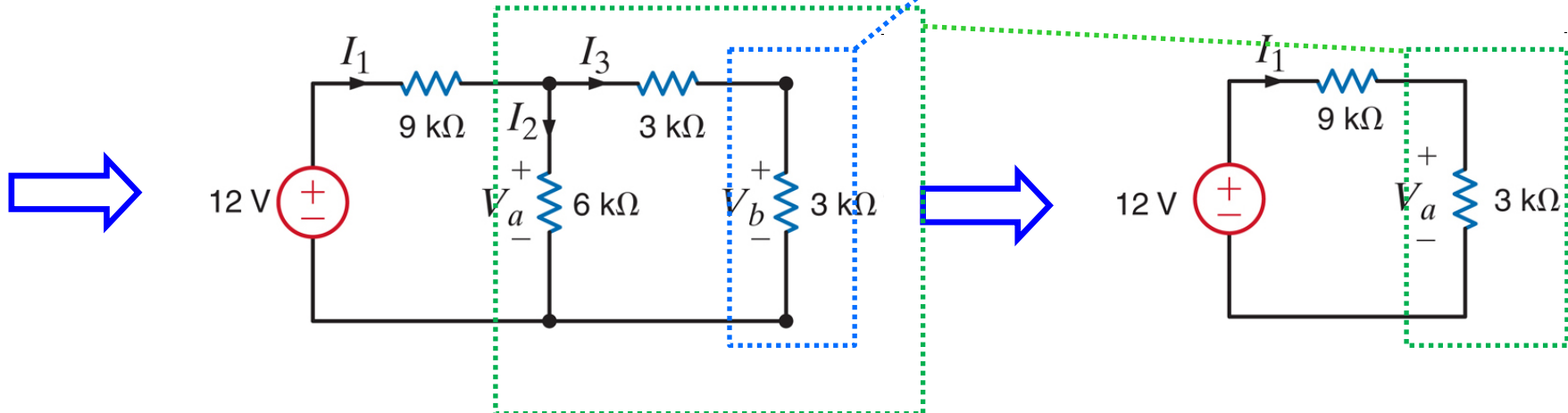


Opmerking  $R_p < R_i$  !

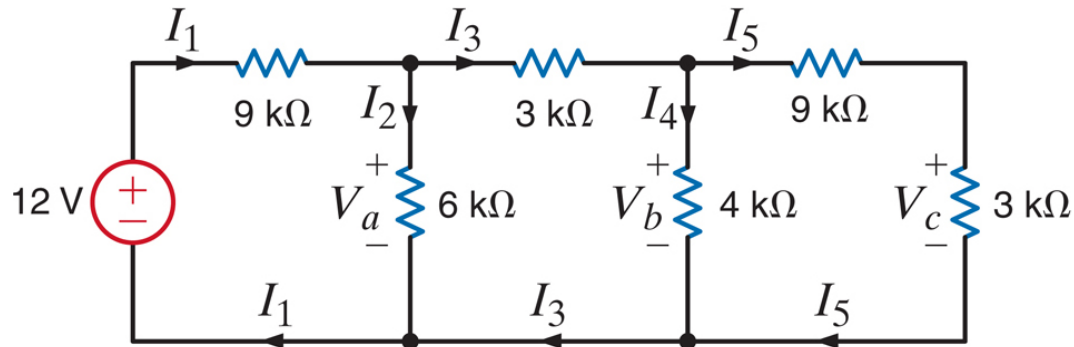
- Bereken alle  $V$ ,  $I$



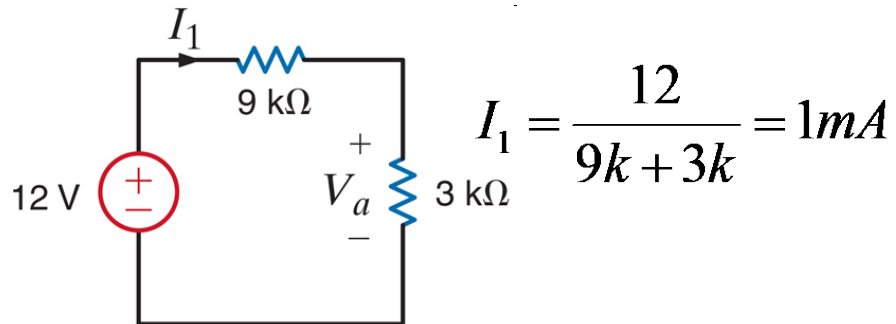
1) Herleiden tot twee weerstanden



- Bereken alle  $V, I$



2) Bereken  $I_1$

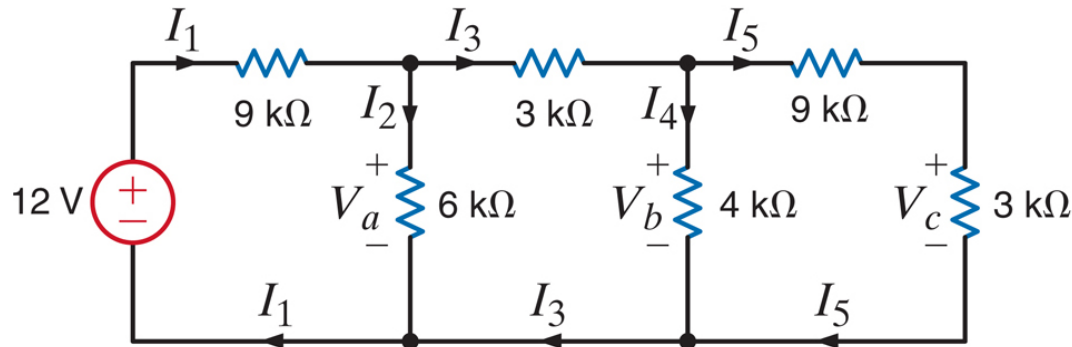


3) Bereken  $V_a$

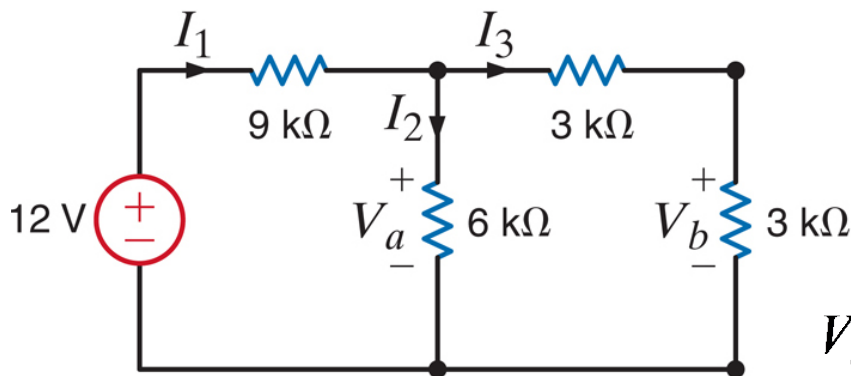
$$V_a = 3k \cdot I_1 = 3V$$

(kan ook via KVL of V - deler)

- Bereken alle  $V, I$



- 3) Bereken  $I_2, I_3, V_b$



$$I_2 = \frac{V_a}{6k} = \frac{3}{6k} = 0.5mA$$

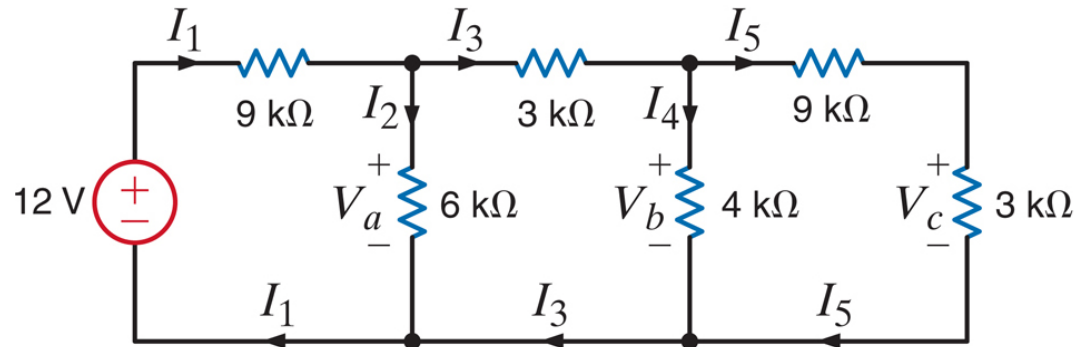
$$I_3 = I_1 - I_2 = 1 \cdot 10^{-3} - 0.5 \cdot 10^{-3} = 0.5mA$$

(KCL, kan ook met Ohm of stroomdeler)

$$V_a - V_b = 3k \cdot I_3 \rightarrow V_b = V_a - 3k \cdot I_3 \rightarrow V_b = 1.5V$$

(KVL, kan ook met Ohm of spanningsdeler)

- Bereken alle  $V, I$



4) Bereken  $I_4, I_5, V_c$  op dezelfde manier

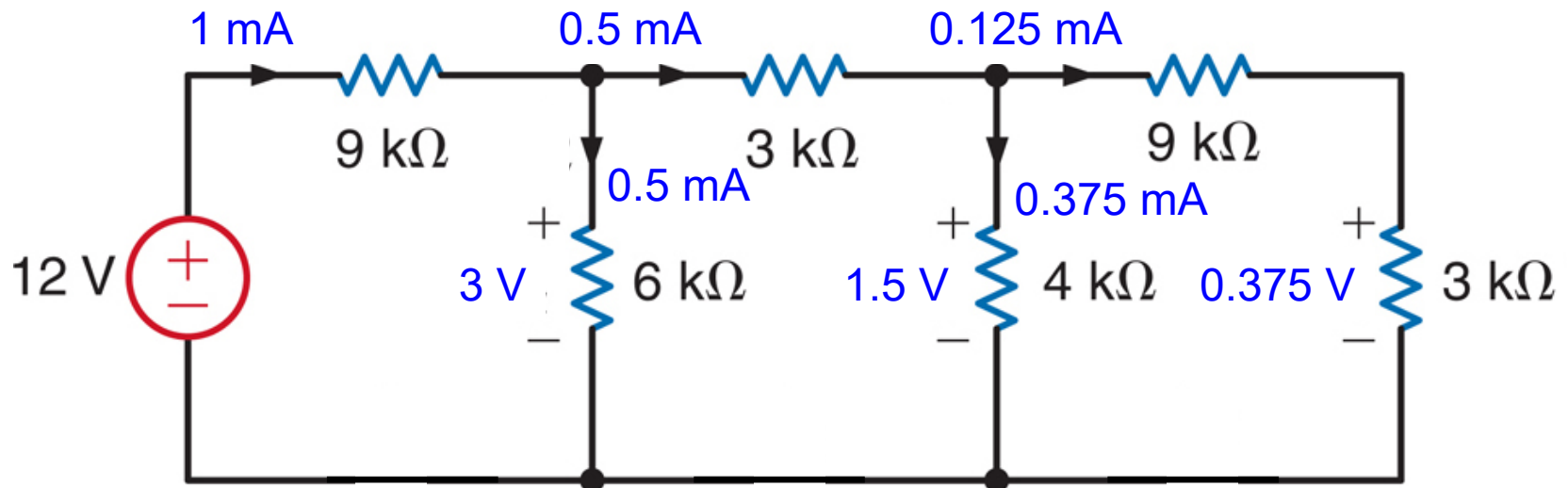
$$I_4 = \frac{V_b}{4k} = \frac{1.5}{4k} = \frac{3}{8} \text{ mA}$$

$$I_5 = \frac{V_b}{9k + 3k} = \frac{1.5}{12k} = \frac{1}{8} \text{ mA}$$

$$V_c = \frac{3k}{3k + 9k} V_b = \frac{3k}{3k + 9k} 1.5 = \frac{3}{8} \text{ V}$$

- Bereken alle  $V, I$

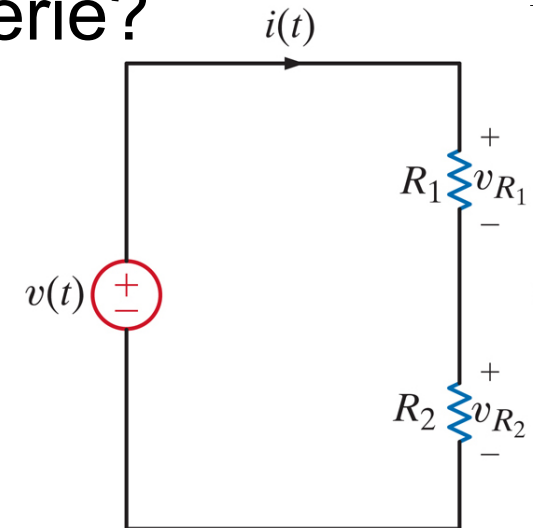
5) De oplossing



- Wanneer staan twee elementen in serie?



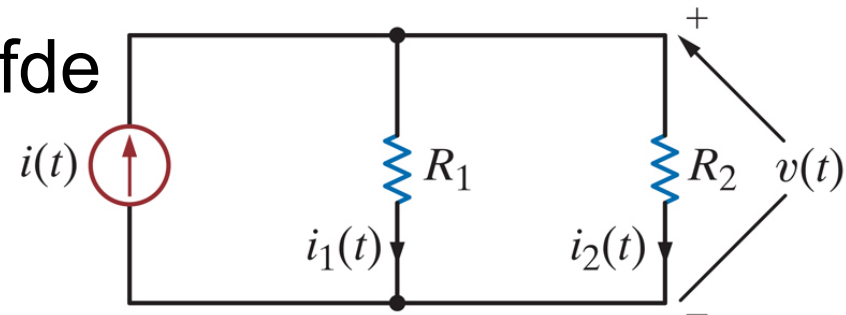
De stroom erdoor is dezelfde



- Wanneer staan 2 elementen in parallel?



De spanning erover is dezelfde

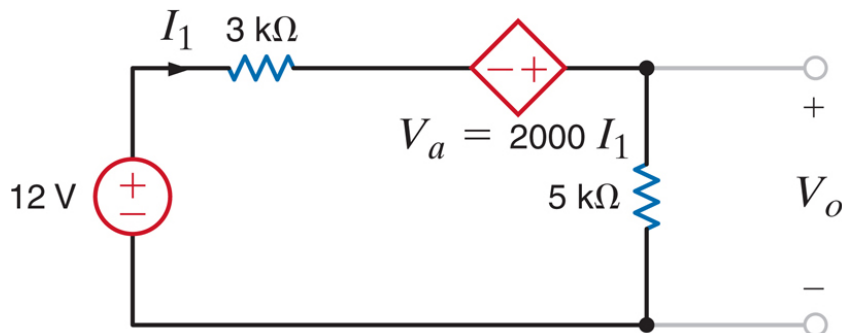






- Eigenlijk niet zo bijzonder om op te lossen:
  - Schrijf gewoon de vergelijkingen die je nodig hebt (KCL, KVL, Ohm) waarbij je de afhankelijke bronnen als een gewone bron behandelt
  - Behandel de afhankelijkheid als een extra vergelijking

Bereken  $V_o$



$$-12 + 3k \cdot I_1 - V_a + 5k \cdot I_1 = 0 \quad (KVL)$$

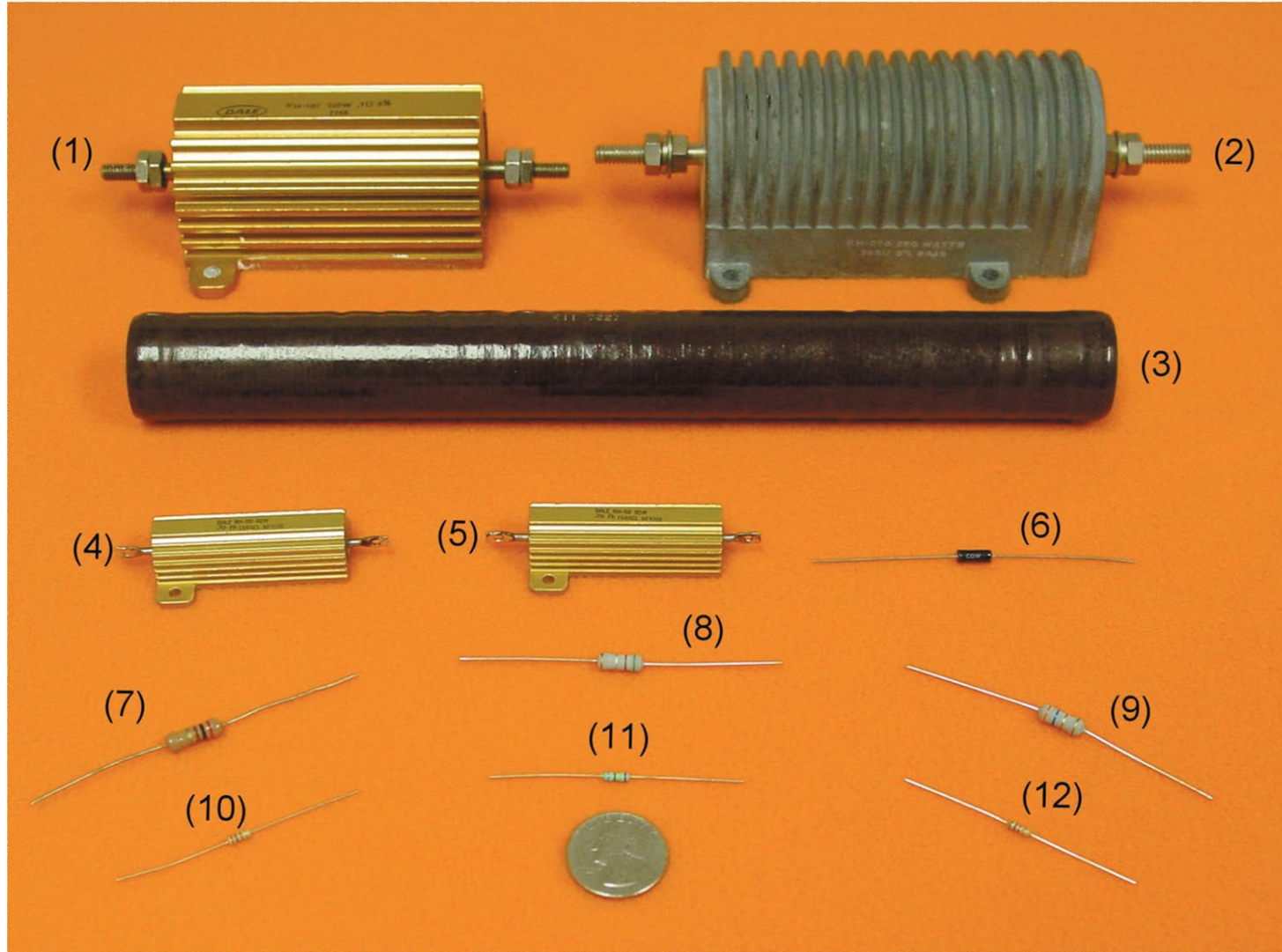
$$V_a = 2000 \cdot I_1 \quad \text{IDV vergelijking}$$

$$I_1 \text{ oplossen: } I_1 = 2mA$$

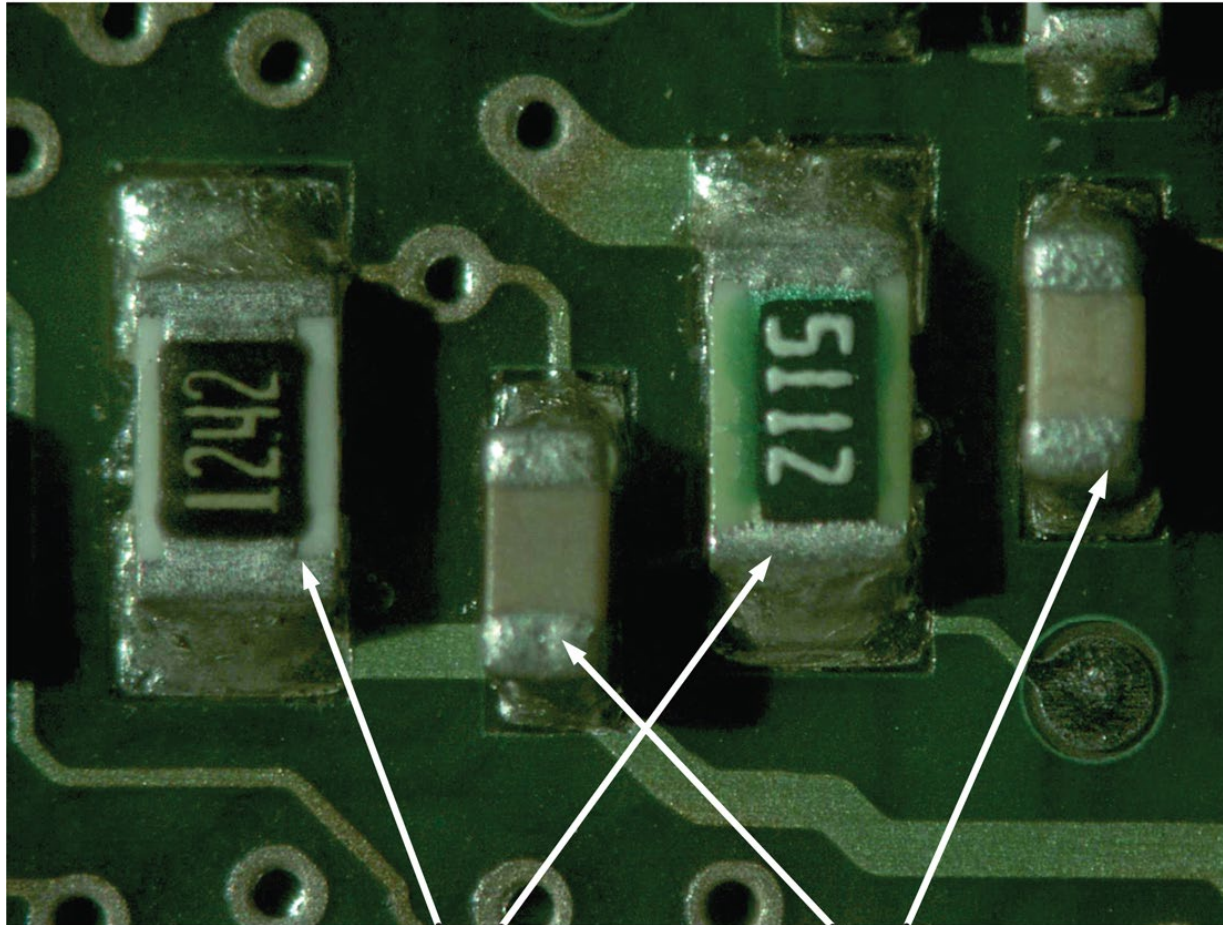
$$\text{En dus (Ohm): } V_o = 5kI_1 = 10V$$

In boek voorbeelden met andere afhankelijke bronnen

# Hoe zien weerstanden eruit



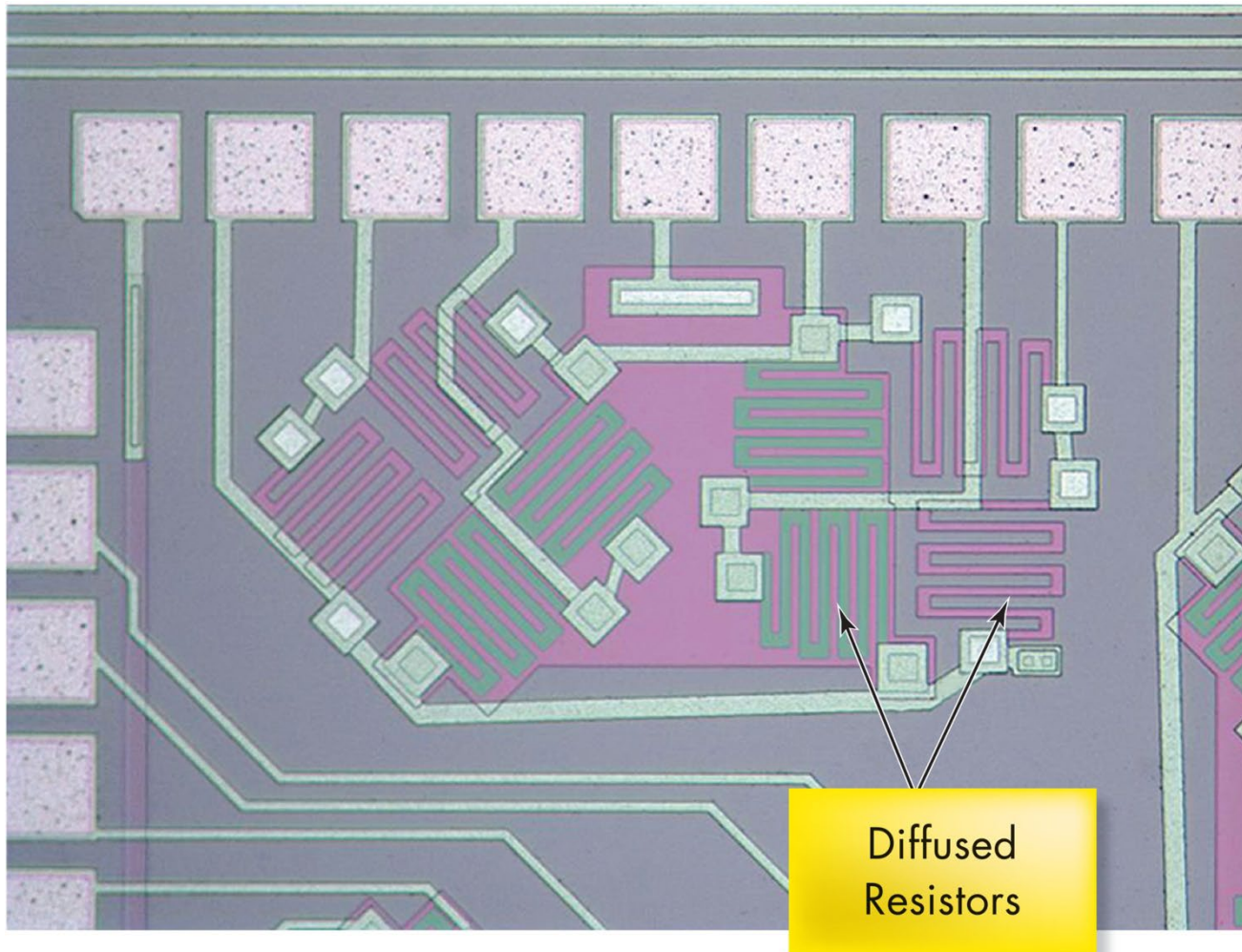
# Hoe zien weerstanden eruit (II)

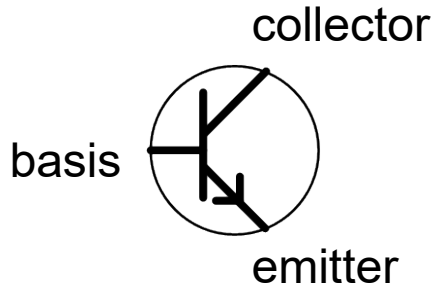


Chip Resistors

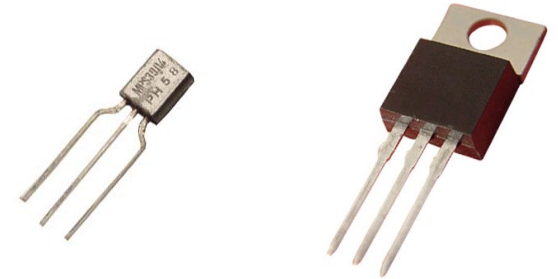
Chip Capacitors

# Hoe zien weerstanden eruit (III)

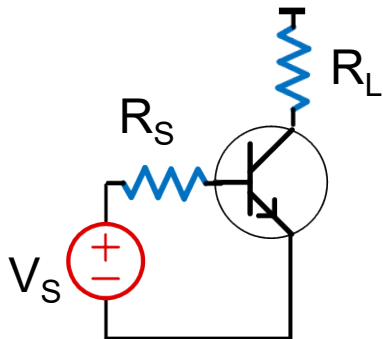




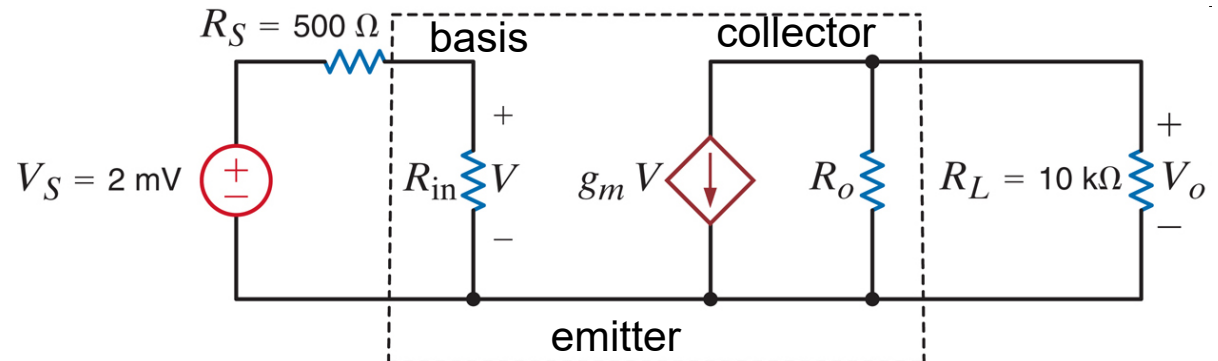
Bipolaire transistor  
Basisbouwsteen voor versterkers



Transistorversterker  
schema

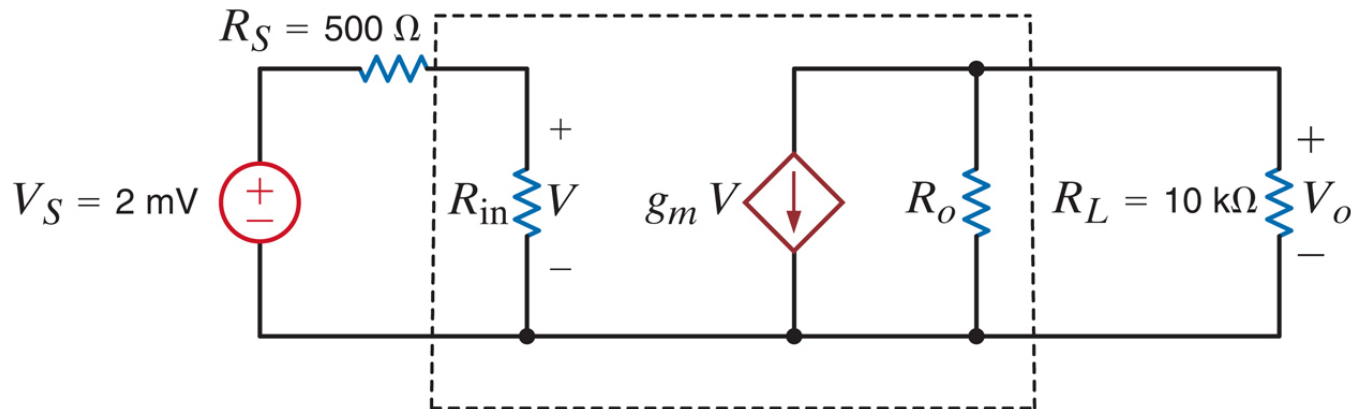


Eenvoudig model voor een transistorversterker



Model voor de transistor

- Wat is de versterking  $V_o/V_S$



Ohm:  $V_o = -g_m V (R_o // R_L) = -g_m V \frac{R_o R_L}{R_o + R_L}$

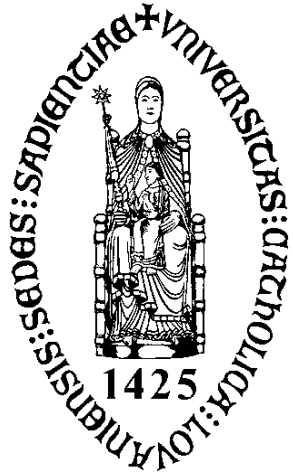
Spanningsdeler:  $V = \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} V_S$

Samen:  $V_o = -g_m \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} V_S \frac{R_o R_L}{R_o + R_L}$

$$\frac{V_o}{V_S} = g_m \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} \frac{R_o R_L}{R_o + R_L}$$

- Chapter 2 – Resistive circuits
  - Volledig gezien, niet alle voorbeelden besproken





# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Hoofdstuk 3

## Knooppuntsanalyse

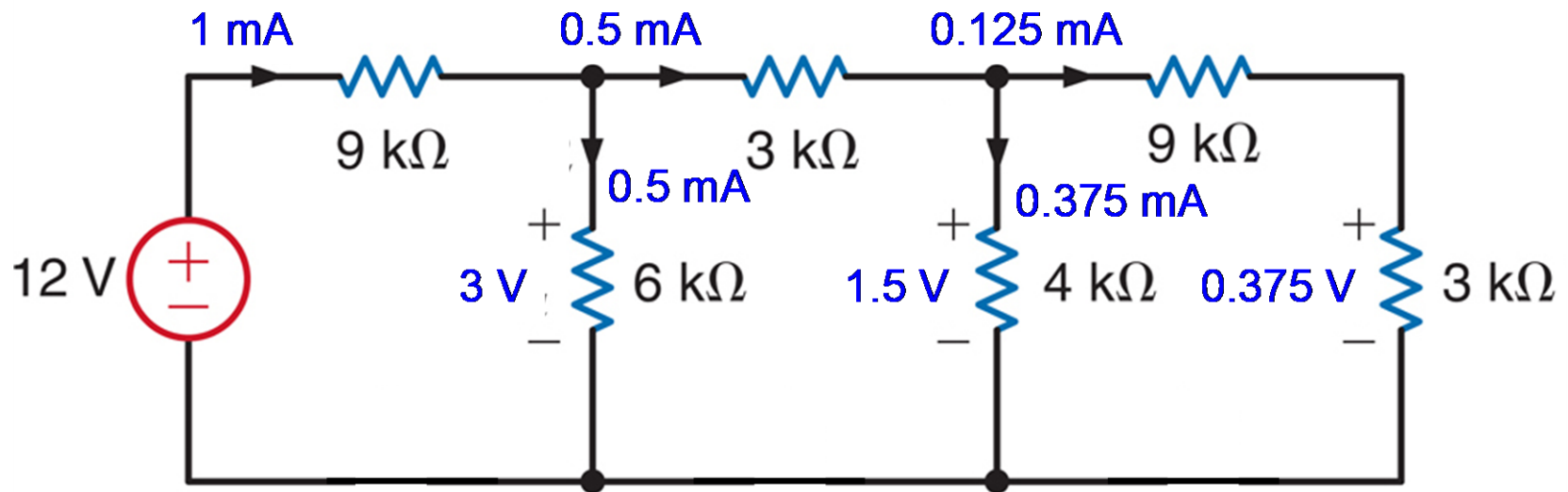
W. Dehaene

---

- Knooppuntsanalyse
  - Systematische methode om alle stromen en spanningen in een circuit te berekenen
- Alternatieven (heel erg kort)

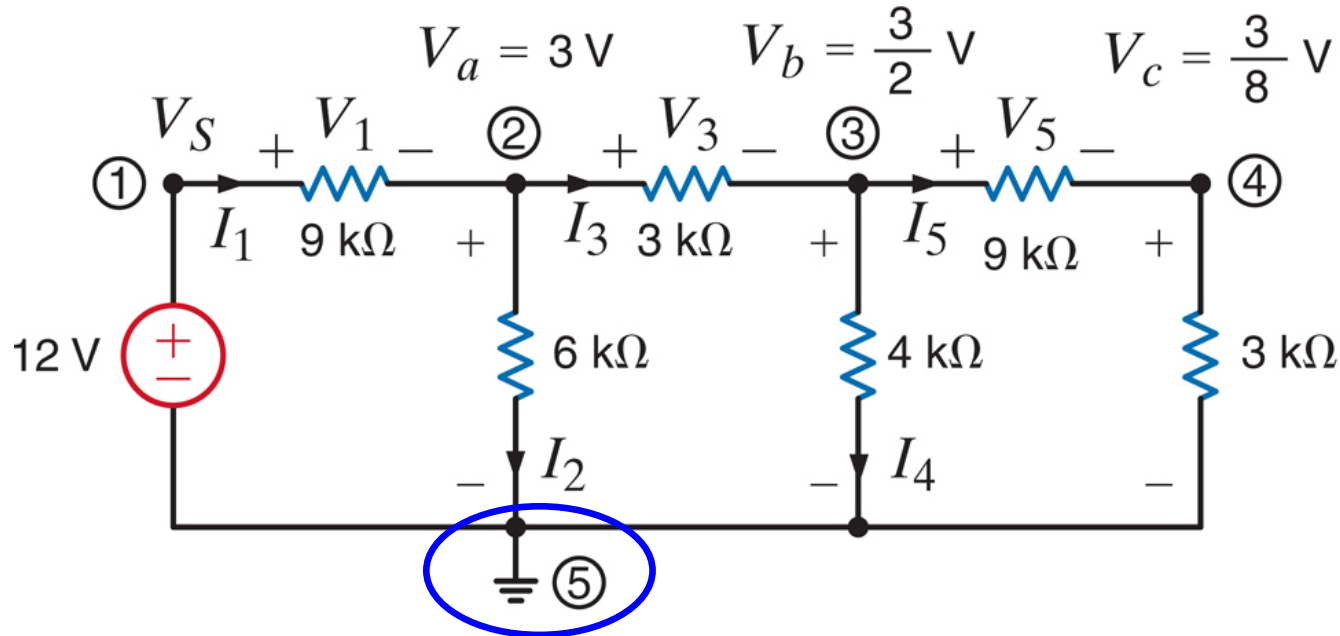
- Tot nu toe hebben we een aantal wetten en hun afgeleiden gezien die verbanden geven tussen de stromen en spanningen in een netwerk: KCL, KVL, wet van Ohm, serie, parallel, ...
- Dit is zeer nuttig – we blijven dit doen – om inzicht te verwerven in kleinere netwerken
- Voor grotere netwerken – en dus computerprogramma's - is er een meer universele methode nodig.
- De universele methode werkt altijd maar is tijdrovend. Met wat inzicht kan het doorgaans sneller.

# Even teruggrijpen naar een voorbeeld (I)



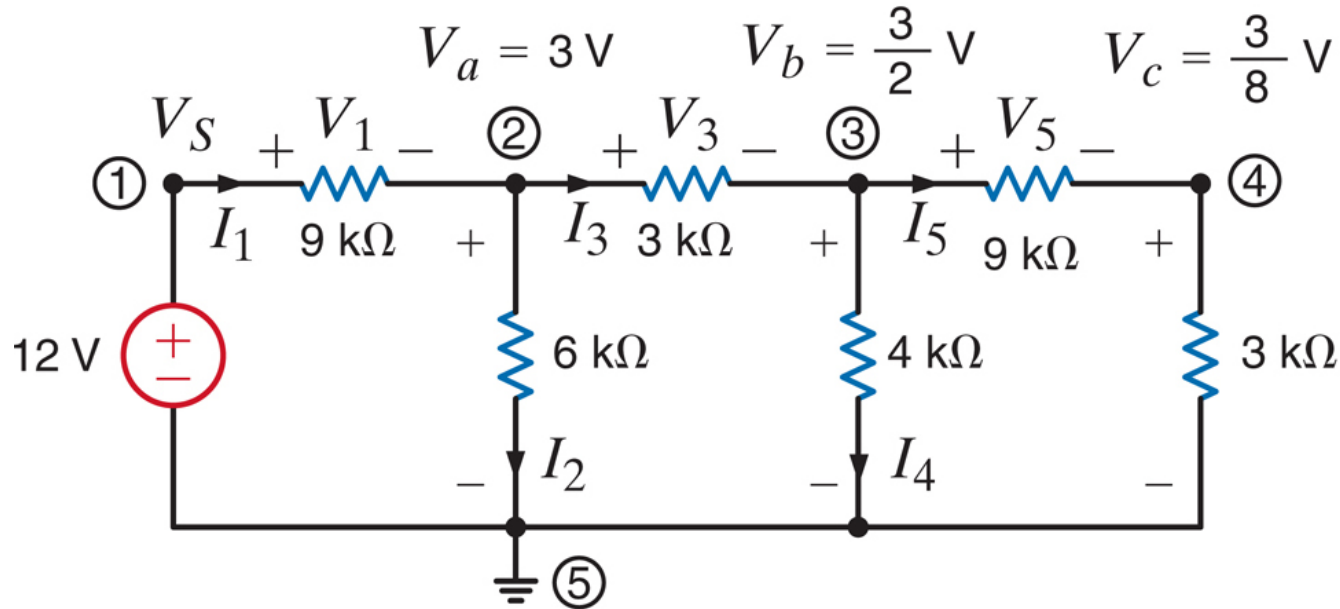
Dit hebben we toen gevonden door te vereenvoudigen met serie- en parallelschakeling van weerstanden.

## Even teruggrijpen naar een voorbeeld (II)

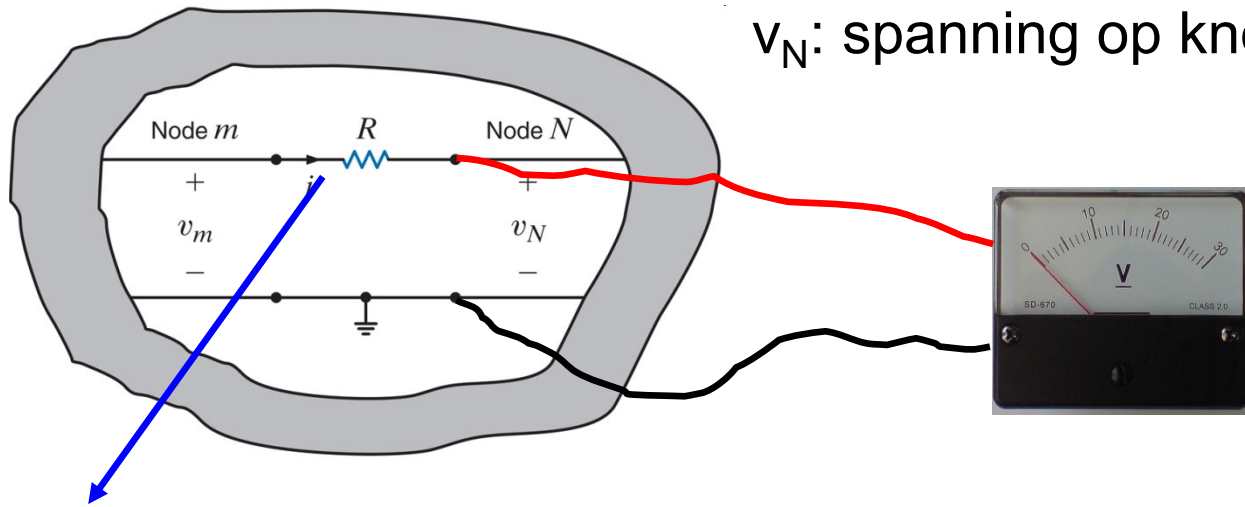


- Iedere knoop heeft een nummer
- We kiezen een speciale knoop: de referentieknoop of ‘grond’, met bijhorend symbool
- Definitie: knoopspanning = de spanning op een knoop t.o.v. de referentieknoop

# Even teruggrijpen naar een voorbeeld (III)



- Hier kennen we de knoopspanningen al uit het voorbeeld  $V_1=12\text{V}$ ,  $V_2=V_a=3\text{V}$ ,  $V_3=V_b=1.5\text{V}$ ,  $V_4=V_c=0.375\text{V}$
- Als we alle knoopspanningen kennen kunnen we ook alle stromen berekenen door per tak te wet van ohm te schrijven



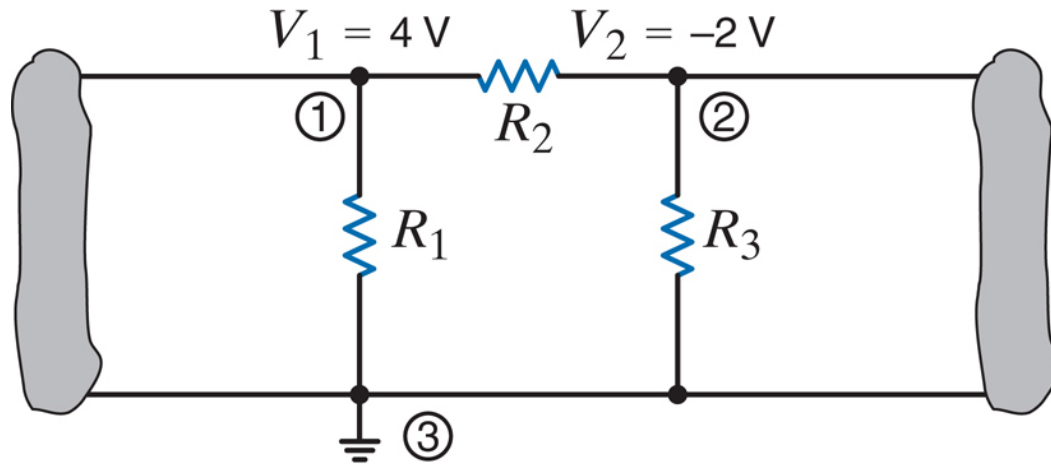
$v_N$ : spanning op knoop N t.o.v. de 'grond'

$i$ : takstroom van knoop m naar N

$$i = \frac{v_m - v_N}{R}$$

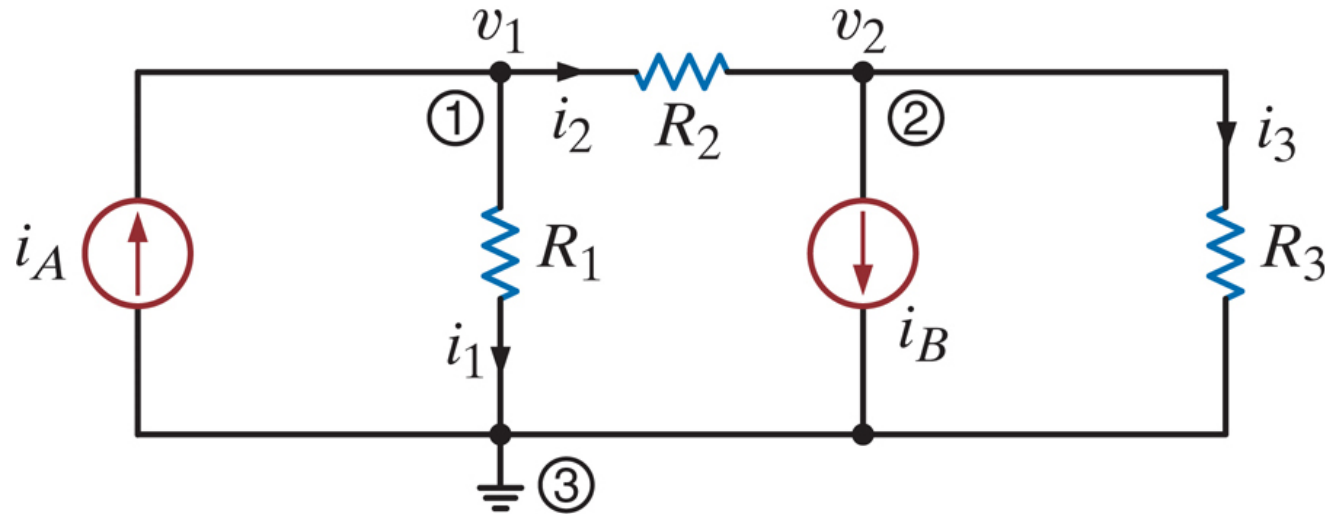
## ■ Tekens

- Knoopspanningen positief t.o.v. de referentie (per definitie)
- Takstroom: kies zin van de pijl
- stroom loopt van hoge naar lage spanning dus bij de gekozen pijl



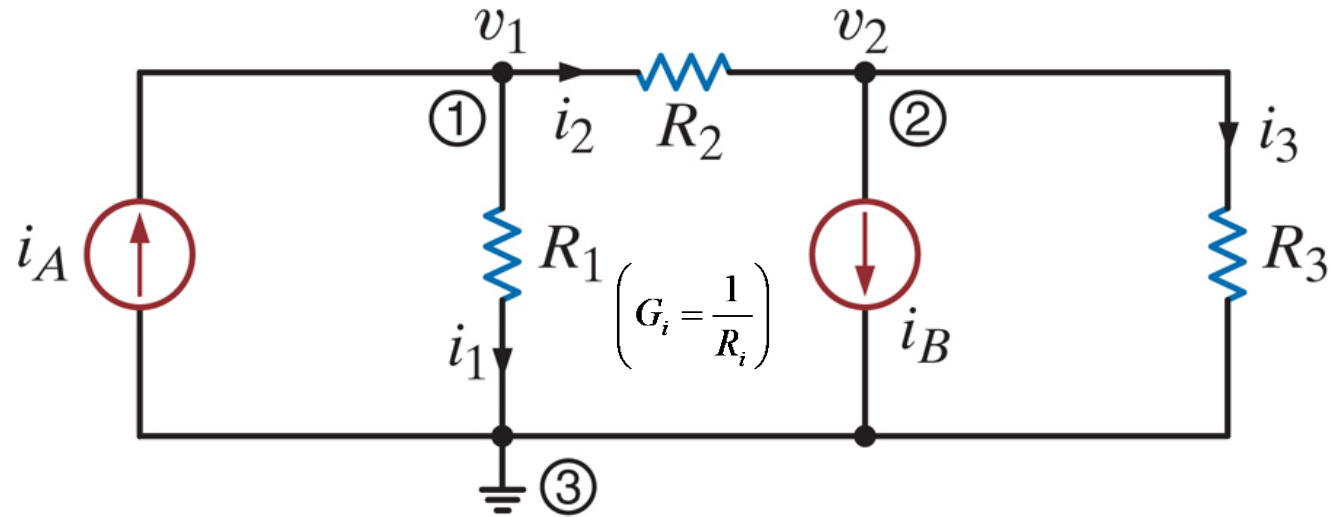
- Welke spanning staat er over  $R_2$ ?
- Welke stroom loopt er door  $R_2$  ( $6\text{ k}\Omega$ )?





## ■ Knooppuntsanalyse

- Kies een referentieknoop
- Schrijf voor iedere knoop, behalve ref knoop, KCL
- Druk daarbij de takstromen uit i.f.v. de knoopspanningen via de wet van ohm
- Dit levert voor N knopen een stelsel van N-1 lineaire, onafhankelijke vergelijkingen met N-1 onbekenden
- Het is (algebra-) peanuts om dit op te lossen



Knoop 1

$$-i_A + i_1 + i_2 = 0$$

$$-i_A + G_1(v_1 - 0) + G_2(v_1 - v_2) = 0$$

$$+ (G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 = i_A$$

Knoop 2

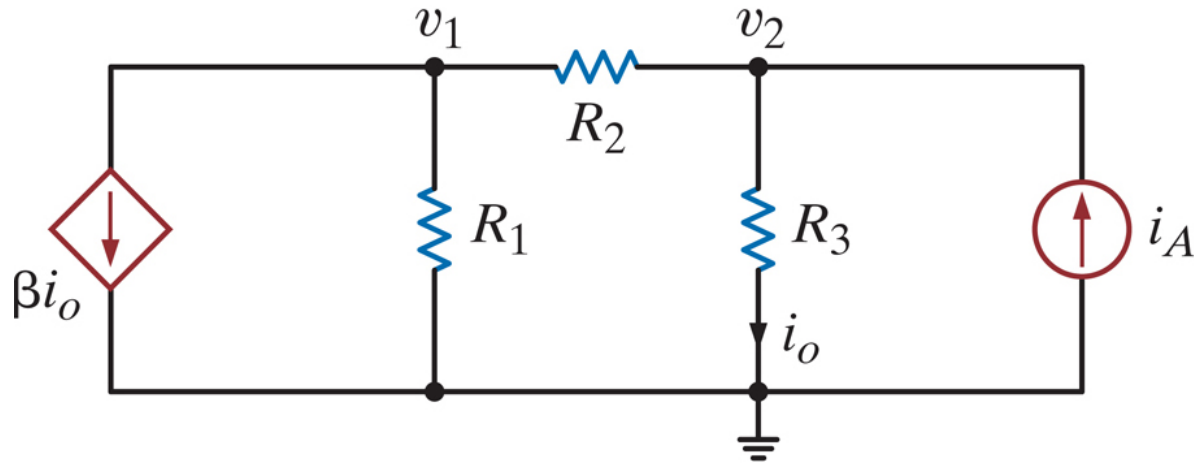
$$-i_2 + i_B + i_3 = 0$$

$$-G_2(v_1 - v_2) + i_B + G_3(v_2 - 0) = 0$$

$$-G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = -i_B$$

2 vergelijkingen  
2 onbekenden:  $v_1$  en  $v_2$

Opmerking: KCL voor de derde, referentie, knoop ' $i_A - i_1 - i_B - i_3 = 0$ ' is niet onafhankelijk



KCL

$$\beta i_o + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + i_o - i_A = 0$$

$$\text{met } i_o = \frac{v_2}{R_3}$$

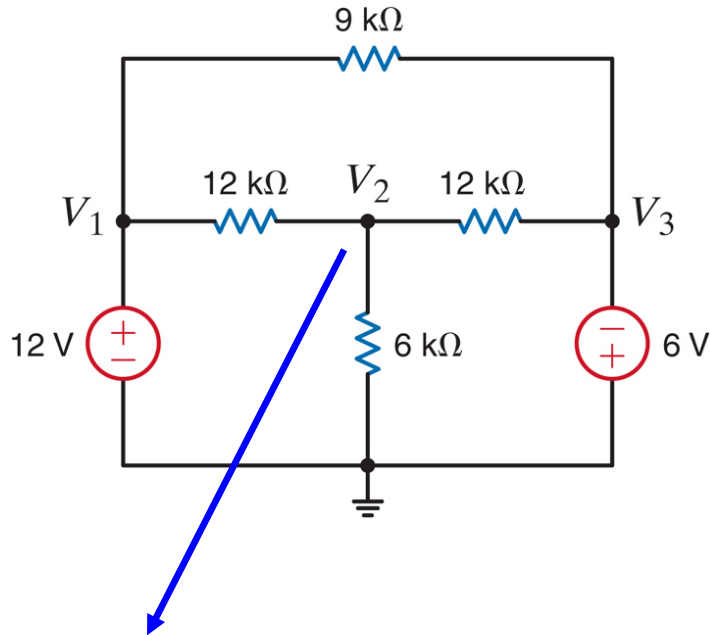
of

$$(G_1 + G_2)v_1 - (G_2 - \beta G_3)v_2 = 0$$

$$(-G_2)v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = i_A$$

$$\text{met } G_i = \frac{1}{R_i}$$

# Met onafhankelijke spanningsbronnen (I)



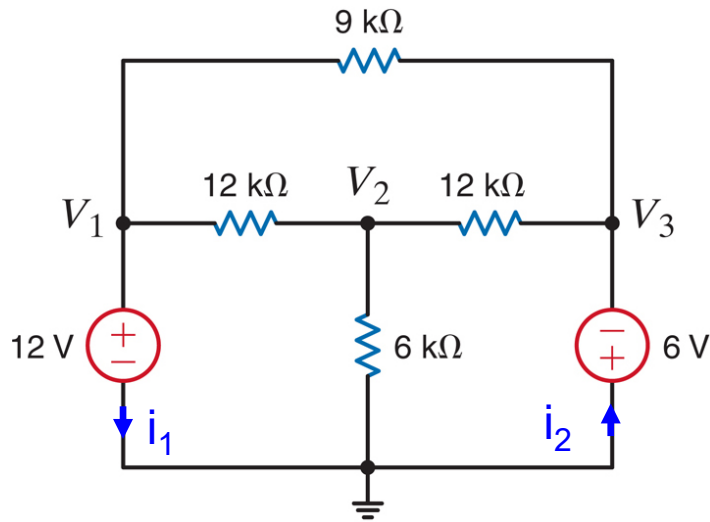
- De bronnen staan tussen de referentieknoop en andere knoop
- Dit maakt de zaak eenvoudiger want we kennen  $V_1$  en  $V_3$  nu ...
  - $V_1 = \dots$     $V_3 = \dots$
- Een KCL vergelijking is genoeg om  $V_2$  te berekenen

$$\frac{V_2 - V_1}{12k} + \frac{V_2 - 0}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

$$\frac{V_2 - 12}{12k} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - (-6)}{12k} = 0$$

$$V_2 = 1.5V$$

# Met onafhankelijke spanningsbronnen (II)



$$i_1 + \left( \frac{V_1 - V_2}{12k} \right) + \left( \frac{V_1 - V_3}{9k} \right) = 0$$

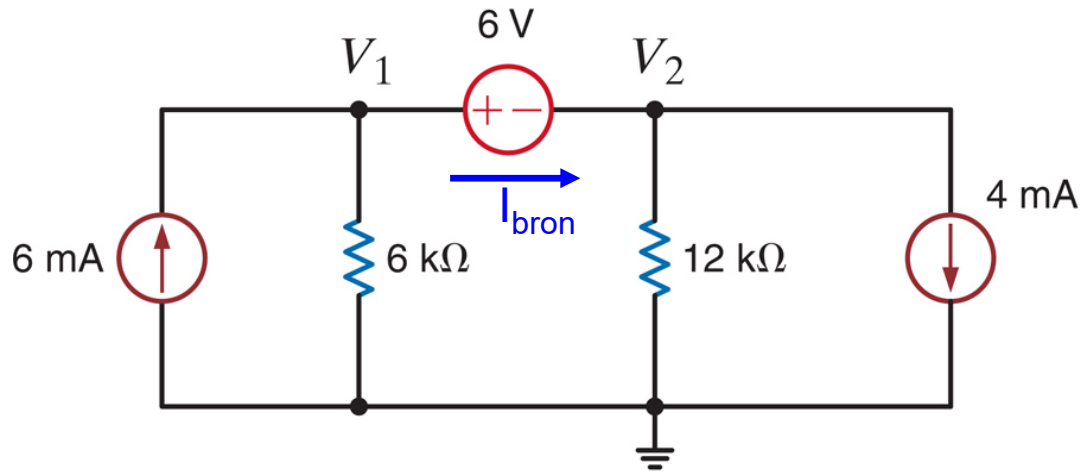
$$-i_2 + \left( \frac{V_3 - V_2}{12k} \right) + \left( \frac{V_3 - V_1}{9k} \right) = 0$$

We kennen de V's  
 dus we kunnen de I's oplossen

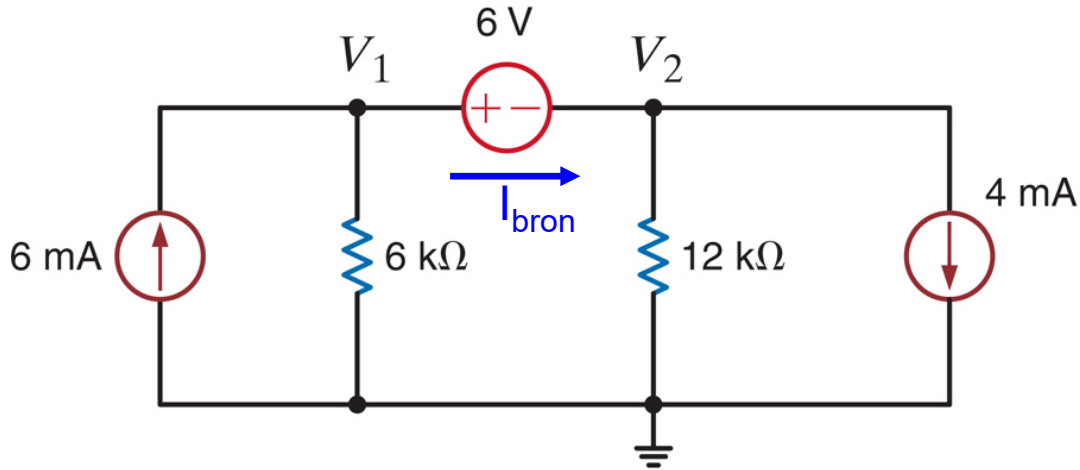
- Wat als we nu ook de stromen willen berekenen in alle takken?
- Ohm voor de R
- Wat met de stroom door de V-bronnen?
- We hebben toch de andere KCL vergelijkingen nodig met  $i_1$  en  $i_2$  als onbekenden

## Conclusie

- We hebben toch N-1 KCL vergelijkingen nodig als we ook de stromen door de V-bronnen willen kennen
- De onbekenden zijn
  - De knoopspanningen waar geen V-bron aanhangt
  - De stromen door de V-bronnen
  - N-1 onbekenden!



- Wat is hier onbekend?
  - $V_1$ ,  $V_2$
  - $I_{\text{bron}}$
- We kunnen maar 2 KCL vergelijkingen schrijven
- Derde vergelijking is 'gratis':  $V_1 - V_2 = 6$
- Oplosbaar!



- KCL 1

$$-6 \cdot 10^{-3} + \frac{V_1}{6k} + I_{bron} = 0$$

- KCL 2

$$4 \cdot 10^{-3} + \frac{V_2}{12k} - I_{bron} = 0$$

- Zwevende bron

$$V_1 - V_2 = 6$$

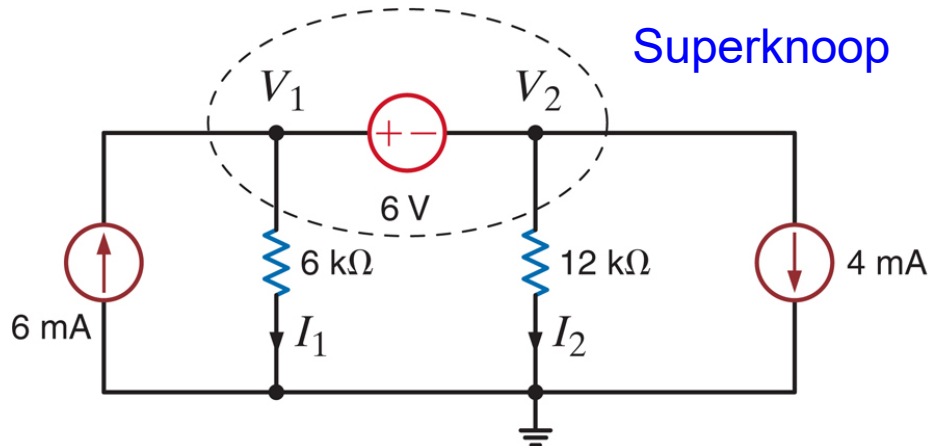
Los op!



$$V_1 = 10V$$

$$V_2 = 4V$$

$$I_{bron} = 4.33mA$$



- KCL geldt ook voor een oppervlak of superknoop
- We sluiten de zwevende bron in in een superknoop
- We schrijven KCL voor die superknoop  
(en de gewone knopen maar die zijn er hier niet meer)

$$-6 \cdot 10^{-3} + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} + 4 \cdot 10^{-3} = 0 \quad \text{En} \quad V_1 - V_2 = 6$$

- 2 vergelijkingen, 2 onbekenden  $\rightarrow$  oplosbaar  
(echter geen oplossing voor  $i_{\text{bron}}$ )



## ■ Bereken $I_o$

- $V_2$  en  $V_4$  gekend
- 12V bron in superknoop
- De 'gratis' vergelijking

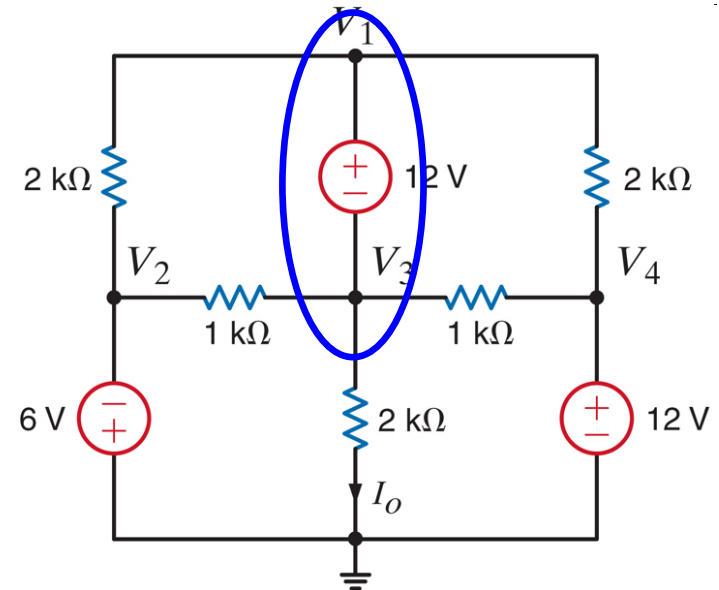
$$V_1 - V_3 = 12V$$

- KCL voor superknoop

$$V_1 \frac{V_3 + 12}{2k} + (-6) \frac{V_3 + 12}{2k} - 12 + \frac{V_3 - (-6)}{1k} + \frac{V_3 - 12}{1k} + \frac{V_3}{2k} = 0$$

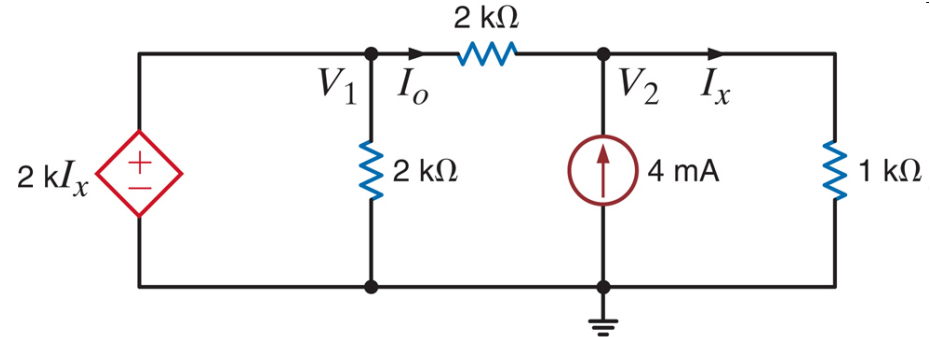
$$V_3 = -\frac{6}{7}V$$

- De stroom  $I_o$ : 
$$I_3 = \frac{V_3}{2k} = \frac{-\frac{6}{7}V}{2k} = -\frac{3}{7}mA$$



## ■ Eigenlijk niets nieuws

- Behandel de afhankelijke bron als een spanningsbron
- KCL/Ohm met de knoopspanningen/bronstromen als onbekenden
- Schrijf de afhankelijkheid in functie van de onbekenden en gebruik dit als extra vergelijking



Wat met de stroom door de Afhankelijke V-bron?

## ■ Dus

- KCL op knoop "V2"  $\left. \begin{aligned} \frac{V_2 - V_1}{2k} - 4 + \frac{V_2}{1k} = 0 \end{aligned} \right\}$

- De afhankelijkheid:  $V_1 = 2kI_x = 2k \frac{V_2}{1k}$

$$V_1 = 16V \text{ en } V_2 = 8V$$

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{2k} = 4mA$$

# Een zwevende afhankelijke bron (I)

KCL op knoop 1

$$\frac{V_1}{12k} + I_x + \frac{V_1 - V_3}{6k} = 0$$

KCL op knoop 2

$$-I_x + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

$I_x$  onbekende

KCL op knoop 3

$$I_y + \frac{V_3 - V_1}{6k} + \frac{V_3 - V_2}{12k} = 0$$

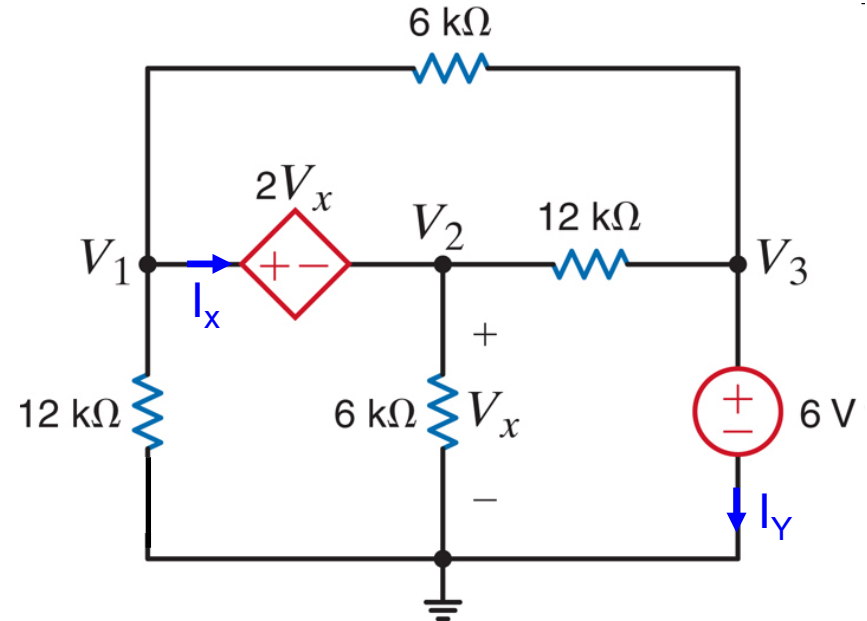
$I_y$  onbekende

Afhankelijkheid i.f.v. onbekenden

$$V_1 - V_2 = 2V_x = 2V_2 \text{ of } V_1 - 3V_2 = 0$$

Onafhankelijke bron

$$V_3 = 6V$$



4 knopen en 2 V-bronnen

→ 5 onbekenden (3 V's en 2 I's)

→ 5 vergelijkingen

# Een zwevende afhankelijke bron (II)

$$\frac{V_1}{12k} + I_x + \frac{V_1 - V_3}{6k} = 0$$

$$-I_x + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

$$I_y + \frac{V_3 - V_1}{6k} + \frac{V_3 - V_2}{12k} = 0$$

$$V_1 - 3V_2 = 0$$

$$V_3 = 6$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} & 0 & \frac{-1}{6k} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} & \frac{-1}{12k} & -1 & 0 \\ \frac{-1}{6k} & \frac{-1}{12k} & \frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5V \\ 1.5V \\ 6V \\ -125mA \\ -625mA \end{pmatrix}$$

- Via maple
- Andere stromen  $\rightarrow$  ohm
- De 5e vgl is onozel ...

## Variaties

- $V_3$  wordt als bekend beschouwd en we berekenen  $I_y$  niet
- Met superknoop rond VDV en we berekenen  $I_x$  niet (zie boek example 3.9)

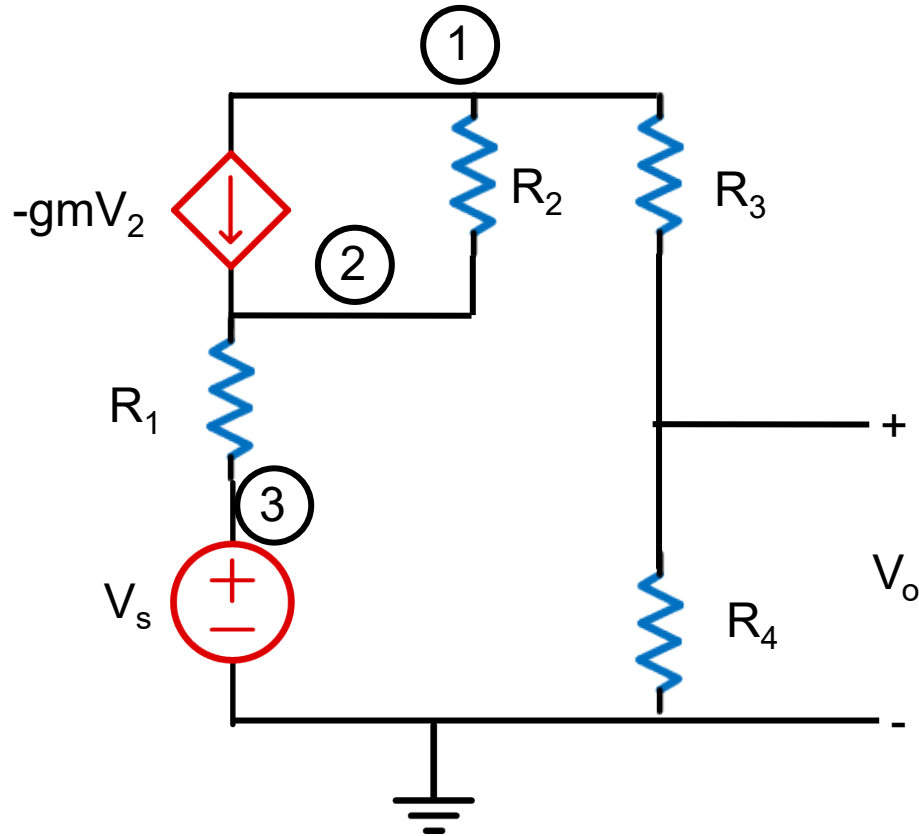
## Versie 1 zonder superknoop

- Schrijf  $N-1$  KCL vergelijkingen
  - Druk de stromen uit i.f.v. de knoopspanningen
  - Voor spanningsbronnen: voer een onbekende stroom in (afhankelijk of onafhankelijk)
- Schrijf een extra vergelijking per  $V$ -bron
  - Onafhankelijk: spanningsverschil tussen de knopen is de bronspanning (je kan ook ineens een onbekende schrappen !)
  - Afhankelijk: spanningsverschil tussen de knopen is de gecontroleerde spanning geschreven i.f.v. de onbekenden (knoopspanningen of bronstromen)
- Je hebt nu  $N-1 + \text{aantal } V\text{-bronnen}$  vergelijkingen en onbekenden
- Los op
- De overige takstromen kan je berekenen via de wet van Ohm

## Versie 2 met superknoop

- Voer een superknoop in voor alle zwevende V-bronnen, afhankelijk of onafhankelijk
- Schrijf KCL vergelijkingen voor alle (super)knopen behalve de referentieknoop
  - Druk de stromen uit i.f.v. de knoopspanningen
- Schrijf een extra vergelijking per V-bron
  - Onafhankelijk: spanningsverschil tussen de knopen is de bronspanning (je kan ook ineens een onbekende schrappen !)
  - Afhankelijk: spanningsverschil tussen de knopen is de gecontroleerde spanning geschreven i.f.v. de onbekenden (knoopspanningen of bronstromen)
- Je hebt nu evenveel vergelijkingen en onbekenden
- Los op
- De takstromen in weerstanden kan je berekenen via de wet van Ohm
- Voor de takstromen in de V-bronnen heb je KCL vergelijkingen nodig op de interne knopen van de superknopen  
(als je deze stromen nodig hebt is de superknoop methode pure ellende)

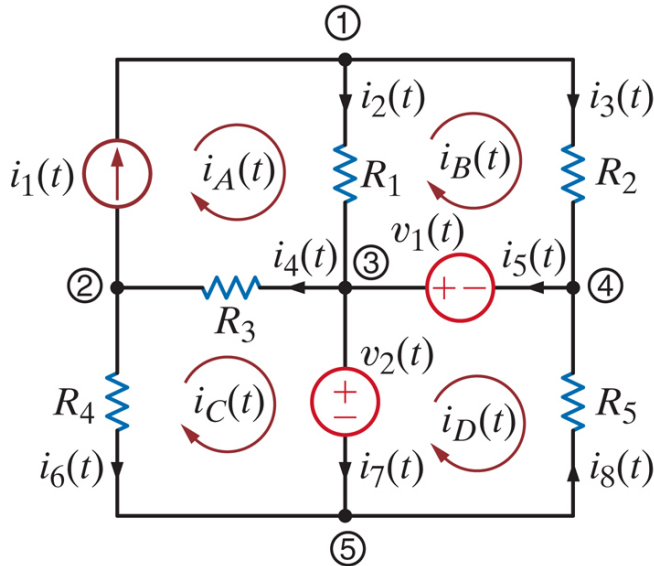
# Een groot voorbeeld met alles erin...



Bereken  $V_o$

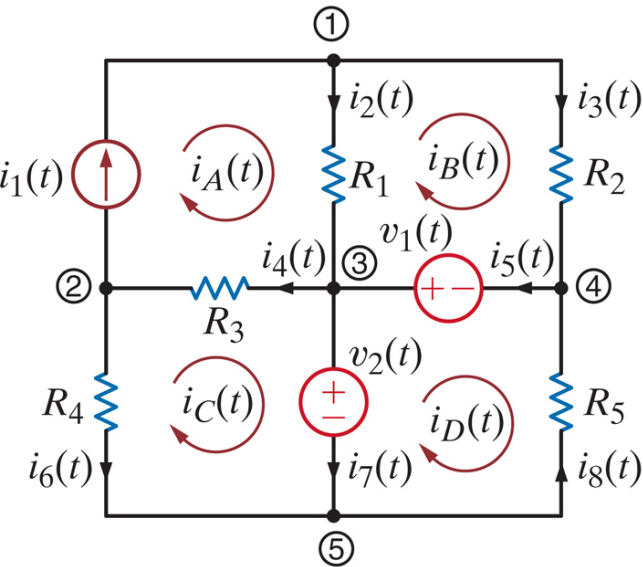
- Dit is de duale methode
  - dualiteit: de rol van spanning wordt overgenomen door stroom en vice versa
  - Gebaseerd op KVL i.p.v. KCL
  - Lus analyse zoek stromen en gebruikt dan Ohm om de spanningen te vinden
  - De miserie die knooppuntsanalyse heeft met V-bronnen komt terug in lus analyse maar dan met I-bronnen.
- Wordt in de praktijk iets minder gebruikt maar is in bepaalde (didactische) gevallen erg nuttig.





## ■ Theorie

- Je hebt  $B - N + 1$  KVL vergelijkingen nodig om dit netwerk op te lossen ( $B = \#$  takken,  $N = \#$  knopen)
- In dit geval  $B = 8$ ,  $N = 5$  dus 4 vergelijkingen.
- Dus zoeken we 4 onafhankelijke lussen met een bijhorende lusstroom  $\rightarrow$  zie figuur



- In deze lussen moeten we KVL vergelijkingen schrijven
- Takstromen kunnen we schrijven i.f.v. lusstromen
  - $i_1 = i_A$
  - $i_2 = i_A - i_B$
  - $i_3 = i_B$
  - ...
- Takspanningen schrijven we dan i.f.v. de lusstromen
- (Gaat niet voor I-bronnen, zal extra maatregelen/onbekenden vergen)

KVL lus 1

$$v_1 + v_3 + v_2 - v_{S1} = 0$$

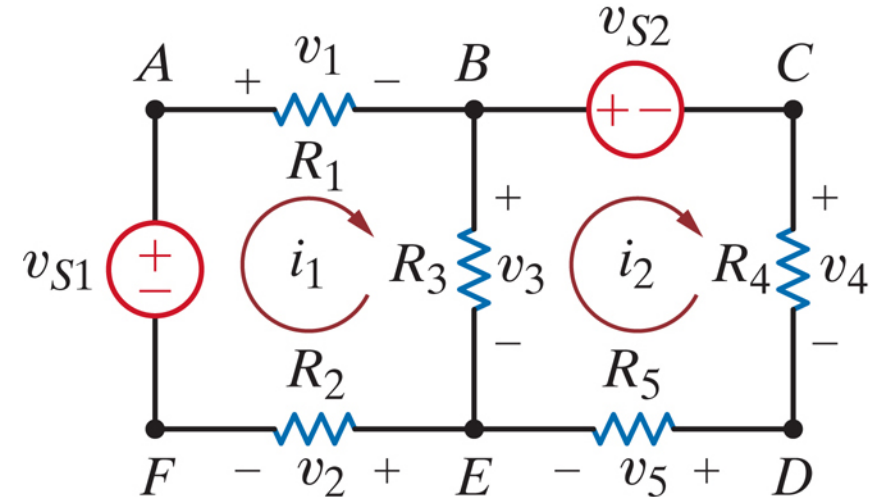
$$i_1(R_1 + R_2 + R_3) - i_2(R_3) = v_{S1}$$

KVL lus 2

$$v_{S2} + v_4 + v_5 - v_3 = 0$$

$$-i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_4 + R_5) = -v_{S2}$$

Stelsel kan opgelost worden  
naar  $i_1, i_2$



- Definitie: maas ('mesh') → speciaal soort lus dat geen circuit elementen omsluit
- Er zijn er twee hier: ABEFA en BCDEB
- Zullen we meestal als lussen gebruiken
- Mesh analysis of maas analyse

## ■ Bereken $I_0$

KVL lus 1

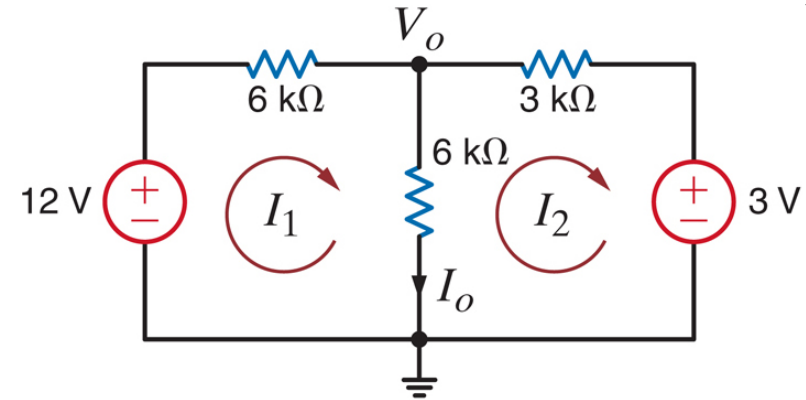
$$-12 + 6kI_1 + 6k(I_1 - I_2) = 0$$

KVL lus 2

$$-6k(I_1 - I_2) + 3kI_2 + 3V = 0$$

Stelsel oplossen

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{5}{4} \text{ mA} \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{ mA} \end{array} \right\} I_0 = I_1 - I_2 = \frac{3}{4} \text{ mA}$$



## ■ In boek

- Alternatieve lussen (geen mazen)
- Knooppuntsanalyse (iets meer werk als het om de stromen te doen is!)

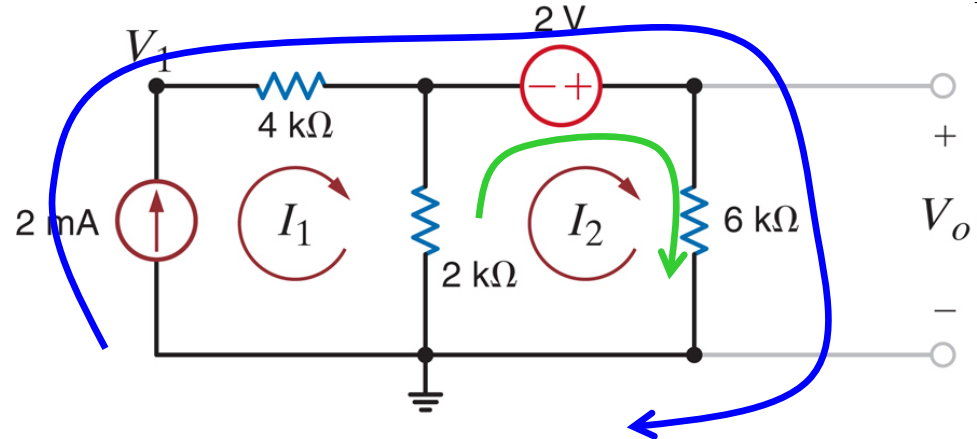
# Lusanalyse met stroombronnen (I)

- Bereken  $V_o$  en  $V_1$

- Lus vergelijkingen

- $-V_1 + 4kI_1 - 2 + 6kI_2 = 0$

- $2k(I_2 - I_1) - 2 + 6kI_2 = 0$



- Extra onbekende:  $V_1$  over de stroombron

- Extra vergelijking: de I-bron bepaalt  $I_1$  !

$$I_1 = 2 \cdot 10^{-3}$$

- Nu hebben we 3 vgl en 3 onbekenden, via substitutie

$$2k(I_2 - 2 \cdot 10^{-3}) - 2 + 6kI_2 = 0$$

$$8kI_2 = 6 \quad I_2 = 0.75mA$$

- We weten nu:

$$I_1 = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$I_2 = 0.75 \text{ mA}$$

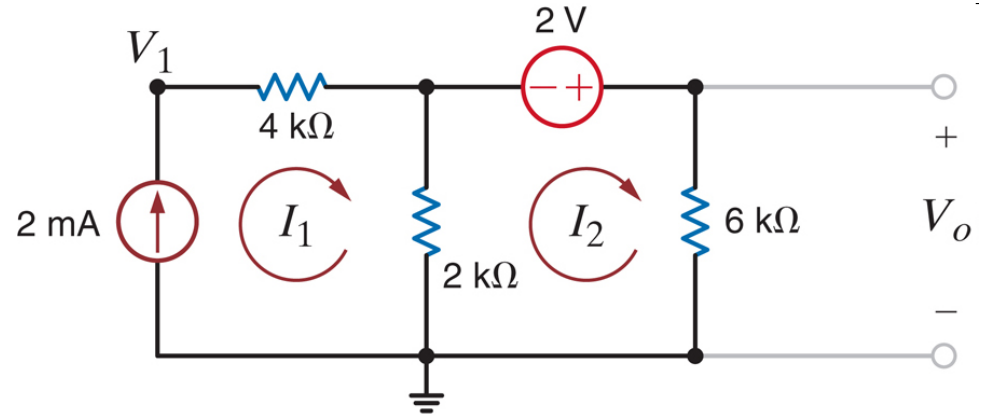
- Dus

$$V_0 = 6kI_2 = 4.5$$

- $V_1$  via lus 1

$$-V_1 + 4kI_1 - 2 + 6kI_2 = 0$$

$$V_1 = 10.5 \text{ V}$$



- Verder

- Afhankelijke bronnen:
  - Lus-vgl zoals voor onafhankelijke bron
  - Extra vgl: afhankelijkheid
- Zie boek voor voorbeelden

- Section 3.1: nodal analysis
  - Volledig gezien
- Section 3.2: loop analysis
  - Gezien, maar wat ingekort
- Section 3.3: application example
  - Niet gezien
- Section 3.4: design example
  - Niet gezien



# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Operationele versterkers

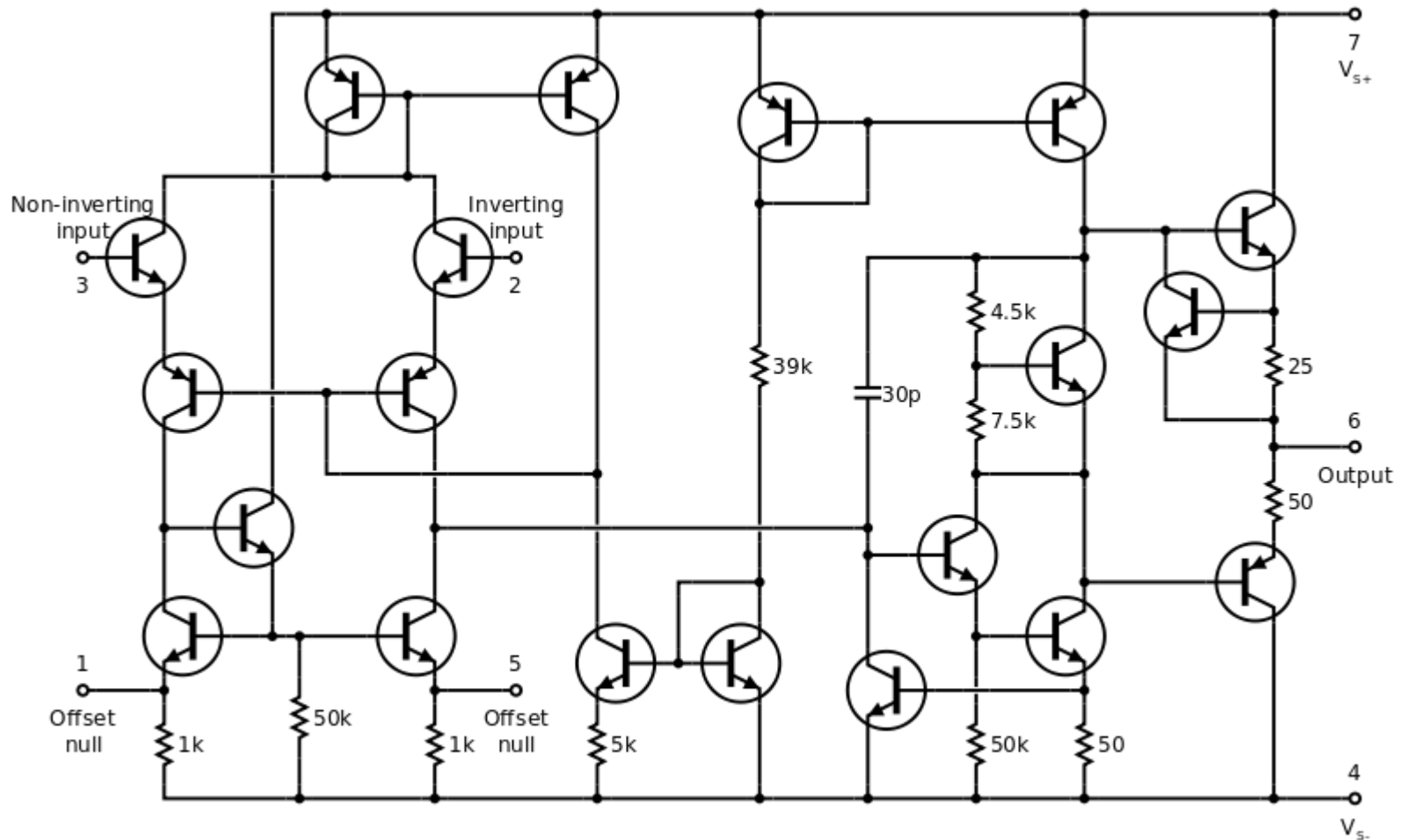
W. Dehaene

---

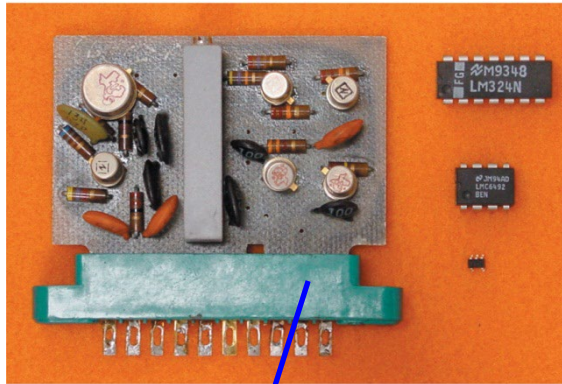


- Inleiding
- Opamp modellen
- Fundamentele opamp circuits
- (comparatoren)
- voorbeelden

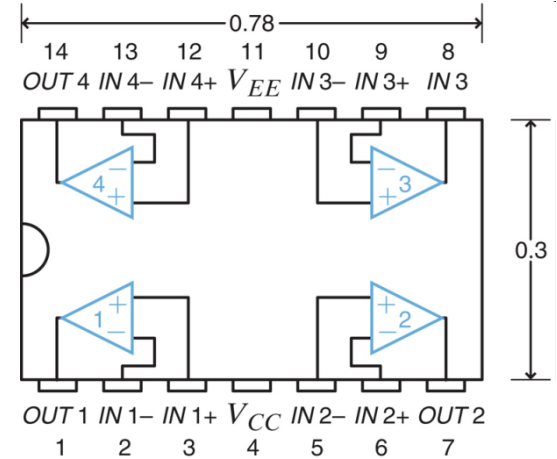
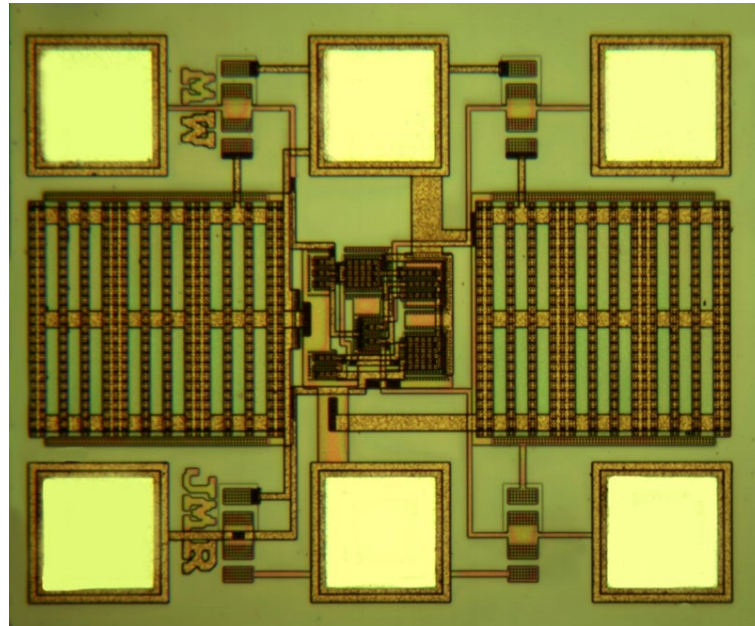
- Met een aantal basiscomponenten maakt men een goed bruikbare versterker
  - Inzetbaar in tal van situaties
  - Kan door specialisten ontworpen worden
  - Versterking komt in zo goed als alle elektronische circuits voor
- Een van de belangrijkste componenten in de elektronica
- Ingewikkeld als je met de details moet rekening houden
- Basisprincipes zijn simpel → ideaal model gebruiken



# Hoe ziet dat eruit (II)?

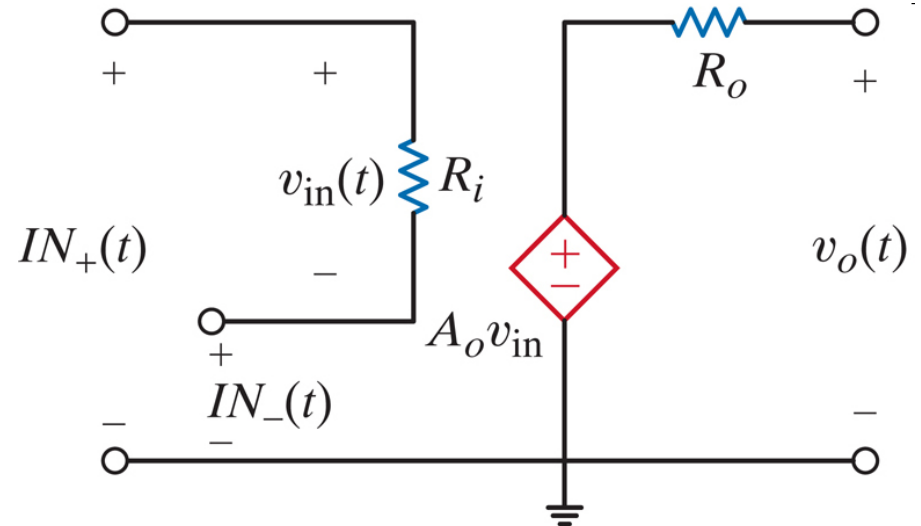
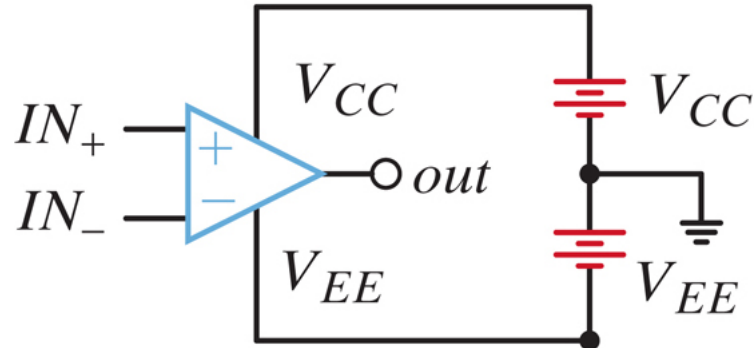


museumstuk



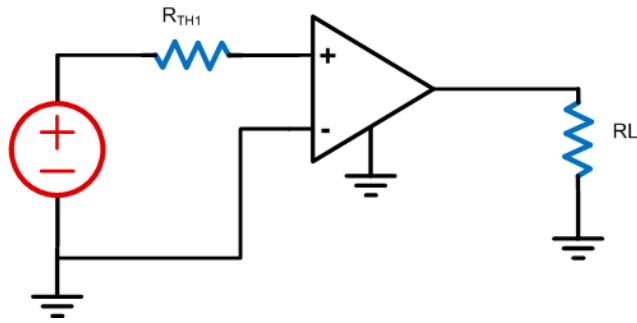
Er bestaan honderden types. TL081, OP27, NE5532, ... worden veel gebruikt

- Eenvoudig model voor een opamp:



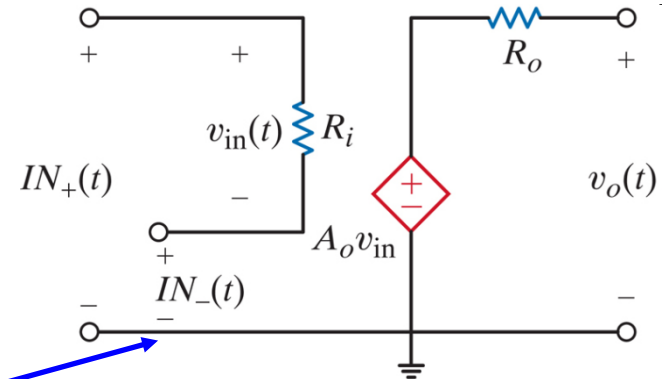
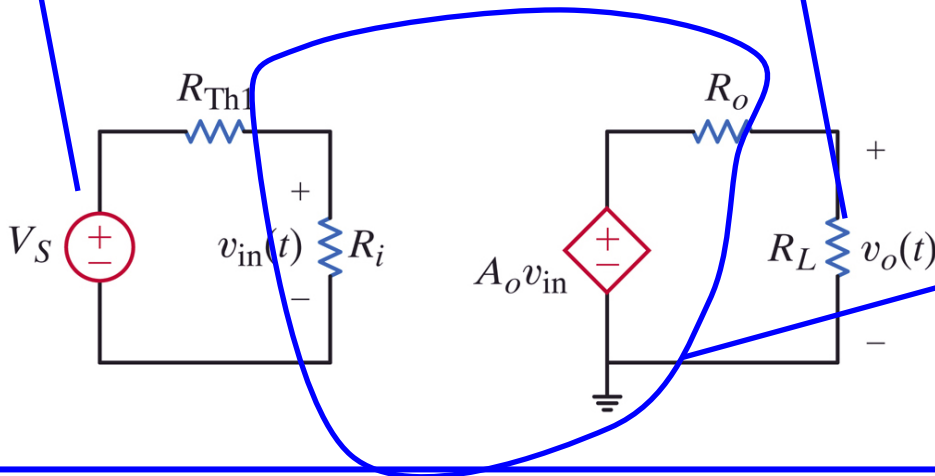
Opamp met symmetrische voeding  
 In de praktijk is het uitgangssignaal  
 gelimiteerd door de voeding

Lineair model

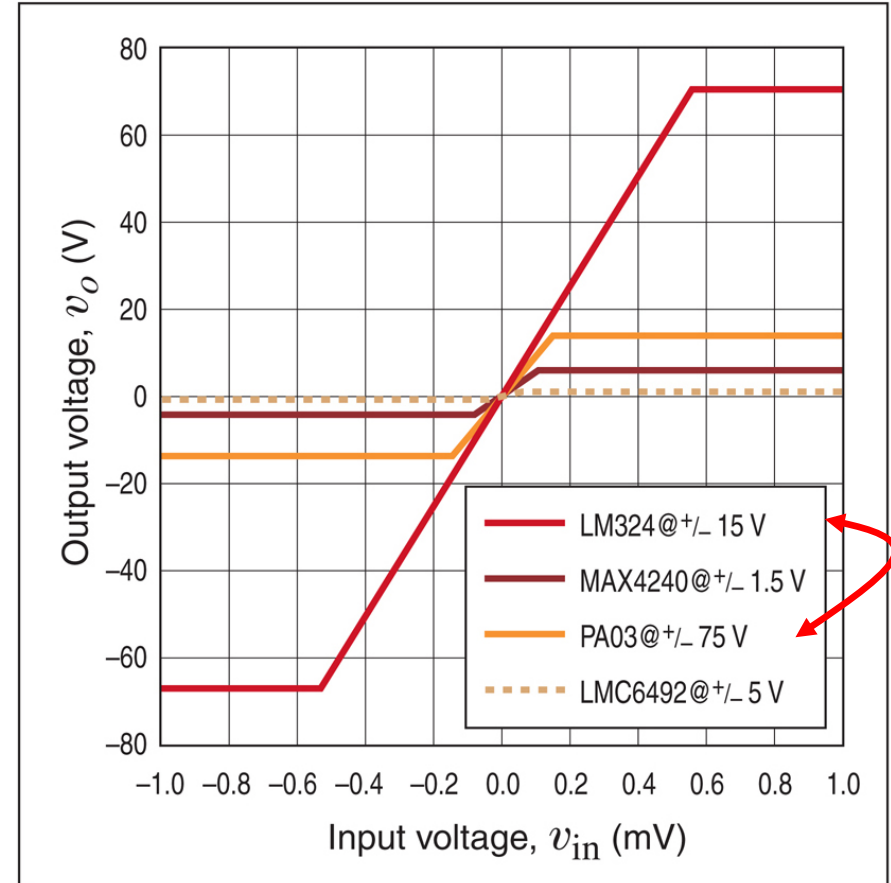
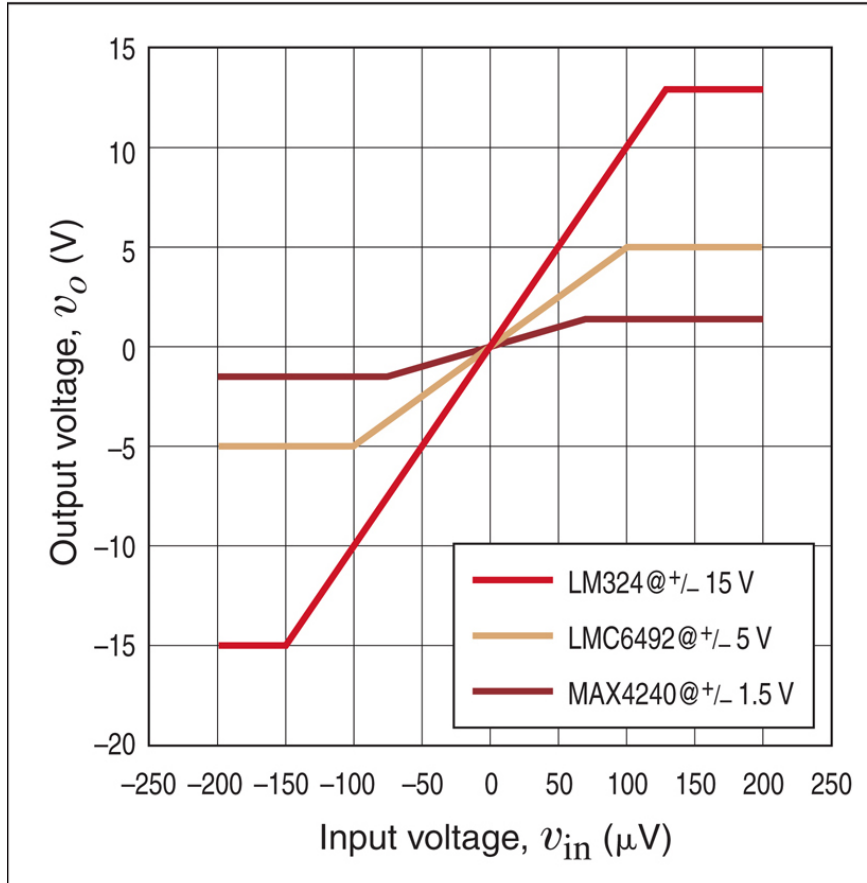


Belasting van de opamp

Bron met uitgangsweerstand  $R_{TH1}$

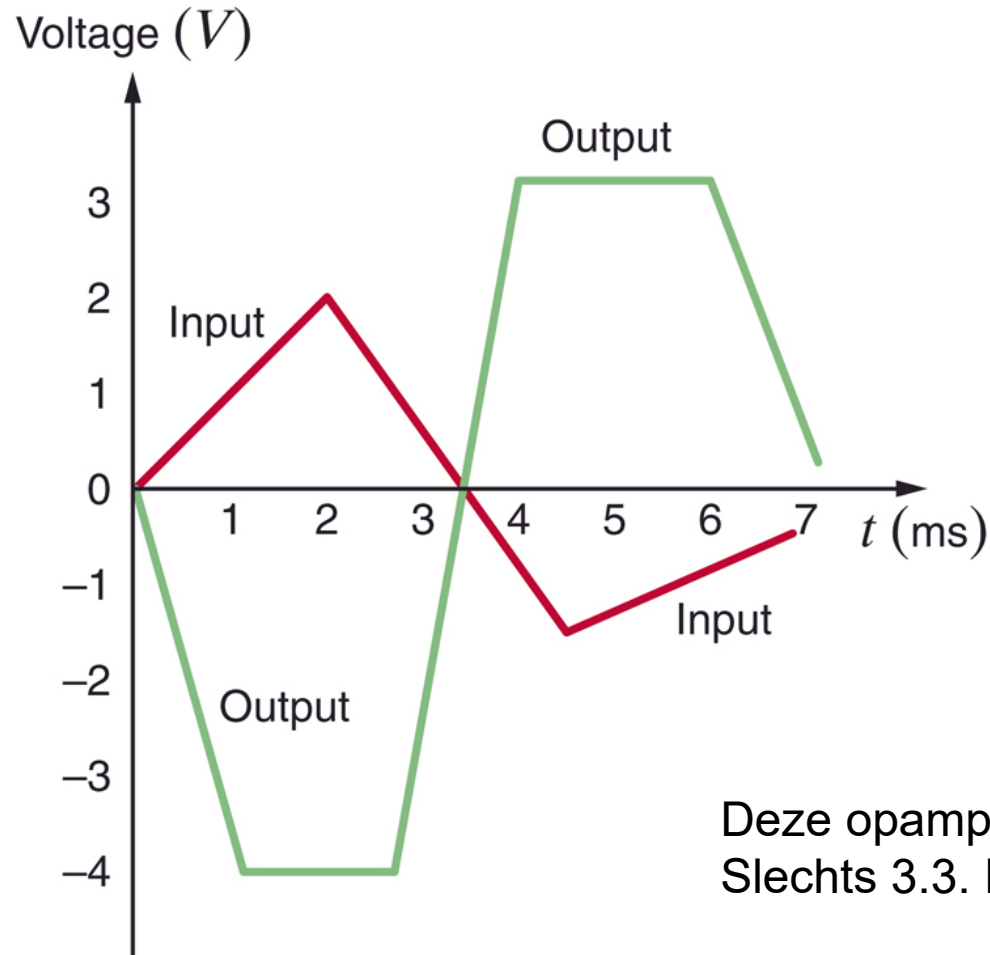


# Uitgang versus ingang (I)



Goede opamps hebben een grote versterking.  
Een ideale opamp heeft versterking  $\infty$

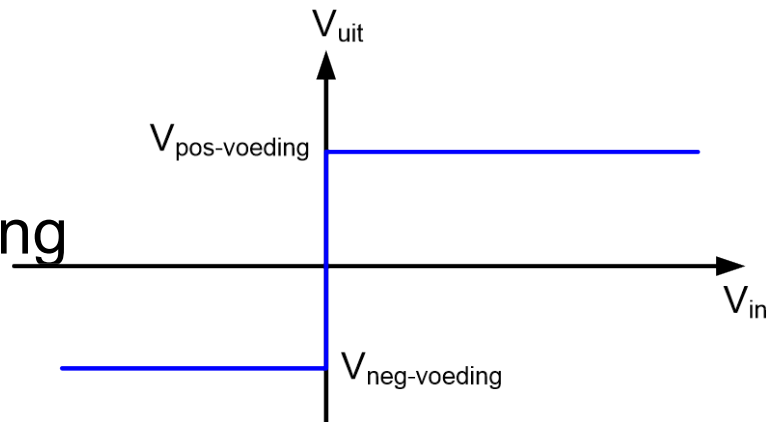
# Uitgang versus ingang (II)

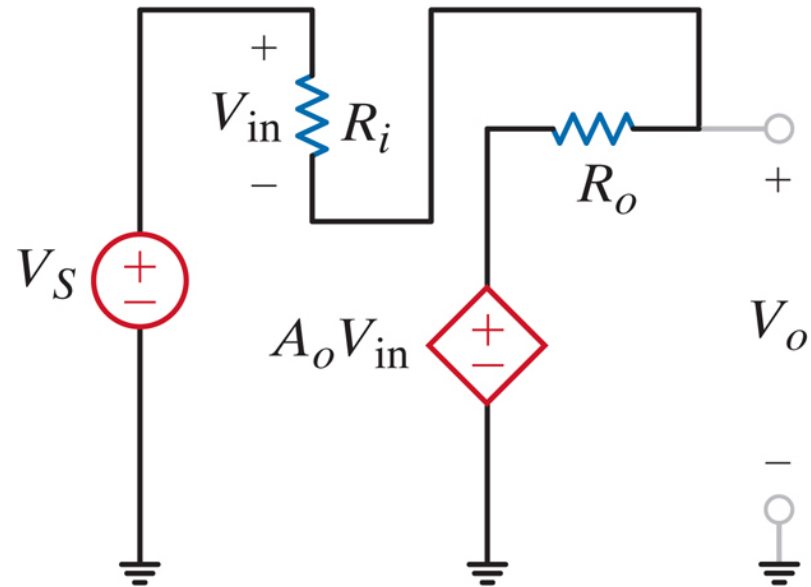
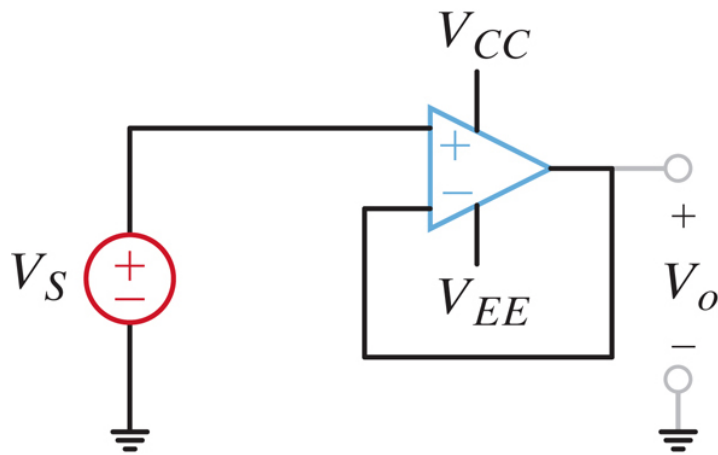


Deze opamp heeft een versterking van Slechts 3.3. Niet erg realistisch dus ...



- Eigenschappen van een ideale opamp
  - $R_i = \infty \rightarrow$  er loopt geen stroom aan de ingang
  - $R_o = 0 \rightarrow$  uitgangsspanning hangt niet af van uitgangsstroom
  - $A_o = \infty$
  - (uitgangsspanning gelimiteerd tot voeding)
- Het model herleidt zich tot
  - VDV
  - Gecontroleerd door ingangsspanning
  - Versterking is oneindig





- Negatieve terugkoppeling: De uitgang is teruggekoppeld naar de negatieve ingang

- Lus analyse

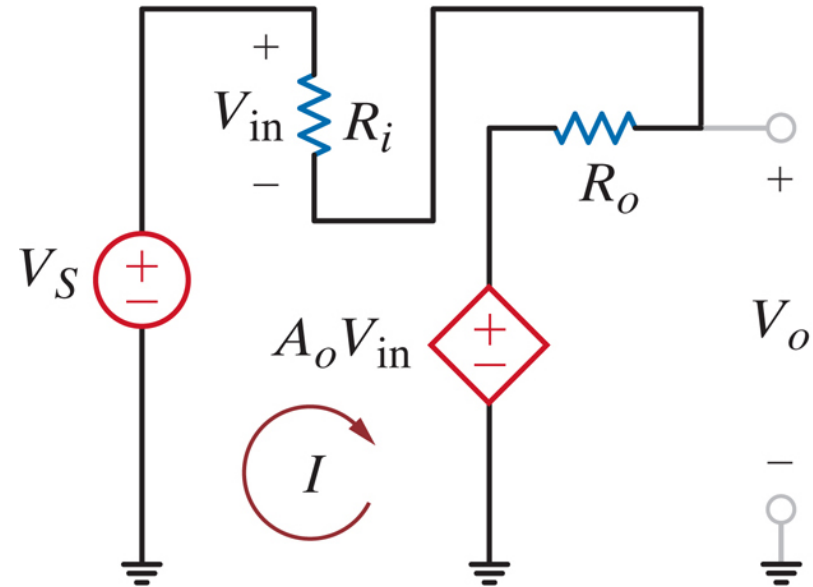
$$V_S = IR_i + IR_o + A_o V_{in}$$

$$V_o = IR_o + A_o V_{in}$$

$$V_{in} = IR_i$$

- Oplossen voor  $V_o/V_S$

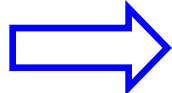
$$\frac{V_o}{V_S} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_o + A_o R_i}}$$



$$\frac{V_o}{V_S} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_o + A_o R_i}}$$

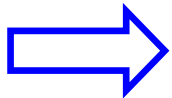
■ Ideale opamp

- $A_o = \infty$
- $R_i = \infty$

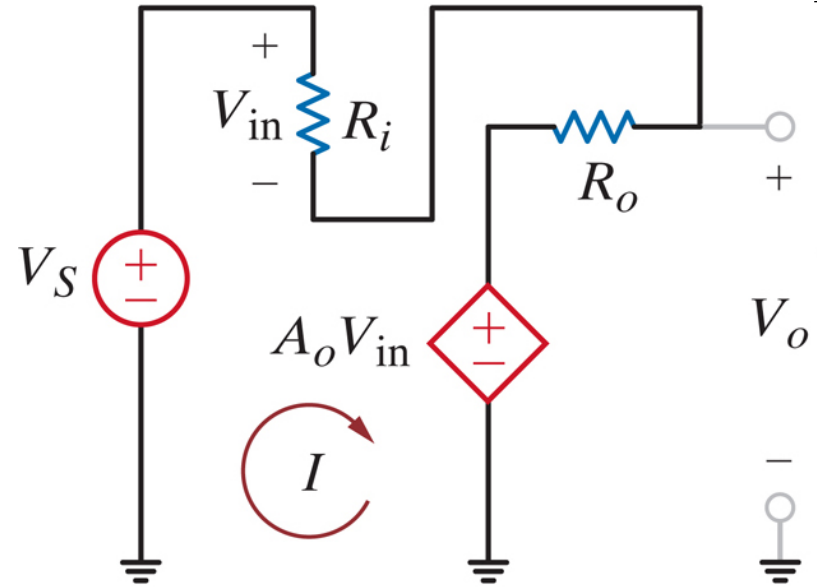


$$\frac{V_o}{V_S} = 1$$

- $R_o = 0$

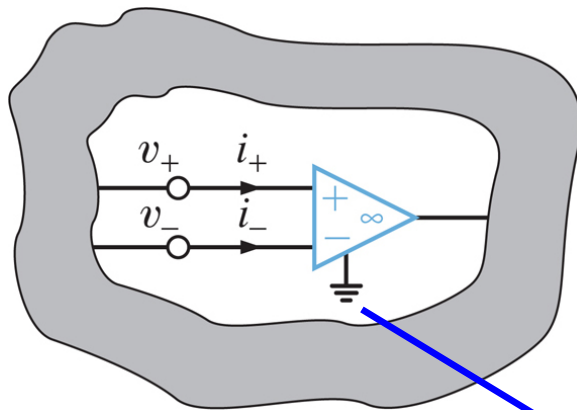


Rail to Rail swing



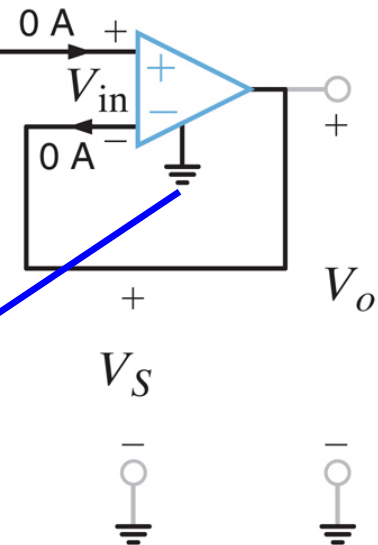
# Buffer met versterking 1 (III)

- Als de versterking oneindig is
- En de uitgang is begrensd
- Dan  $(v_+ - v_-) = 0$   
 → Dit heet de “virtuele kortsluiting” van een opamp  
 Dit treedt op bij negatief teruggekoppelde circuits (en enkel dan!)
- In de praktijk:  $(v_+ - v_-) = 0$  is heel klein. Dit is de foutspanning (error voltage)



$$v_+ = v_-$$

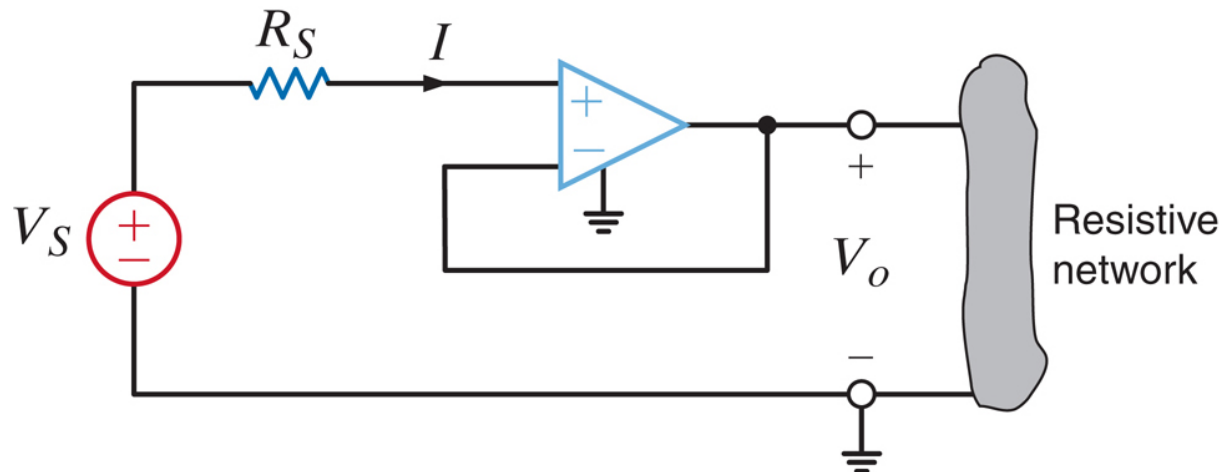
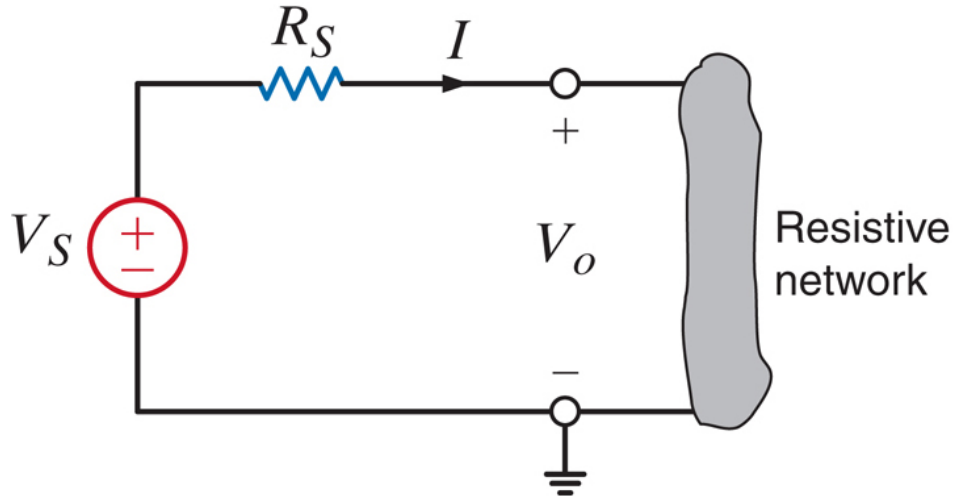
$$i_+ = i_- = 0$$

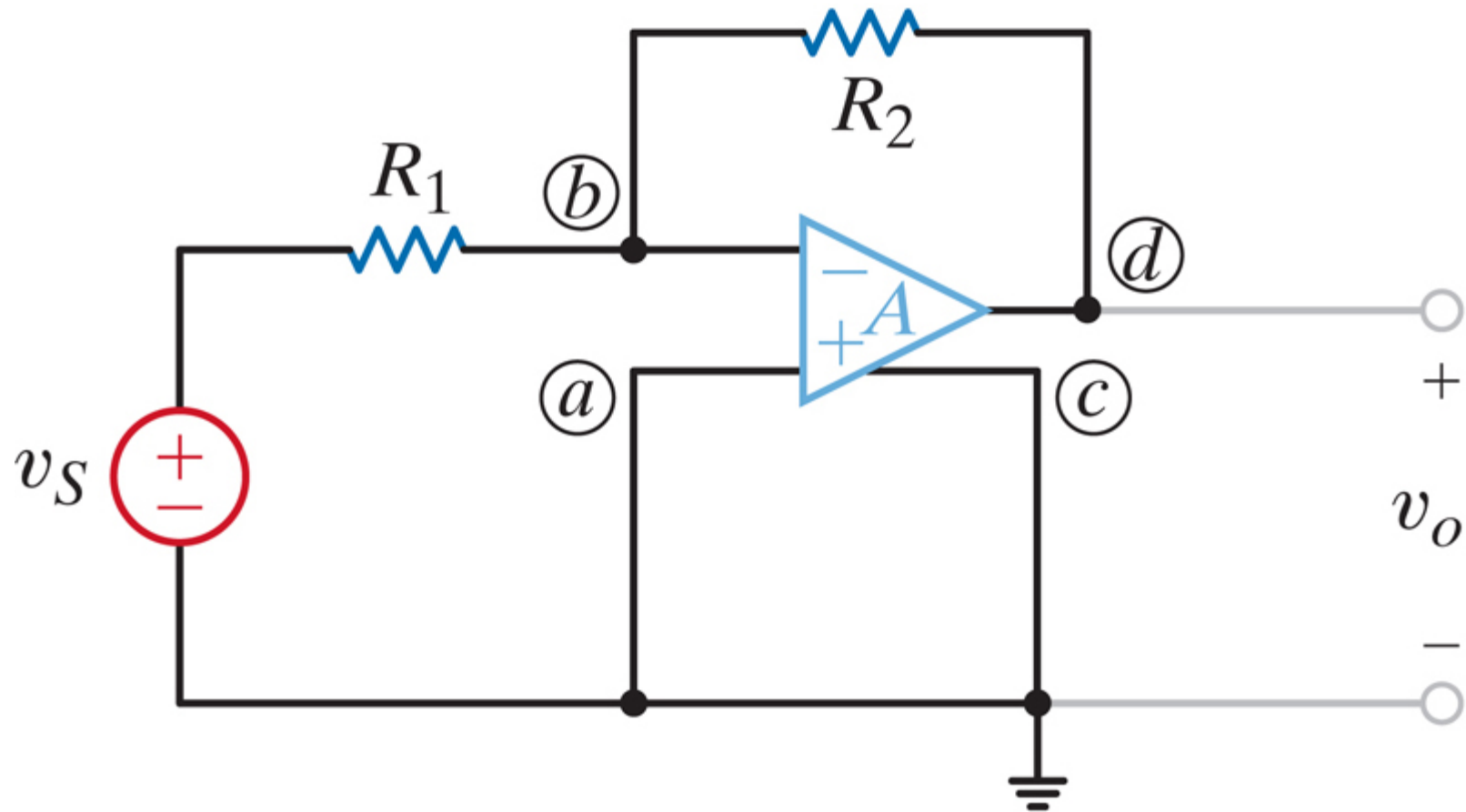


Grond symbool nodig voor KCL op de opamp!

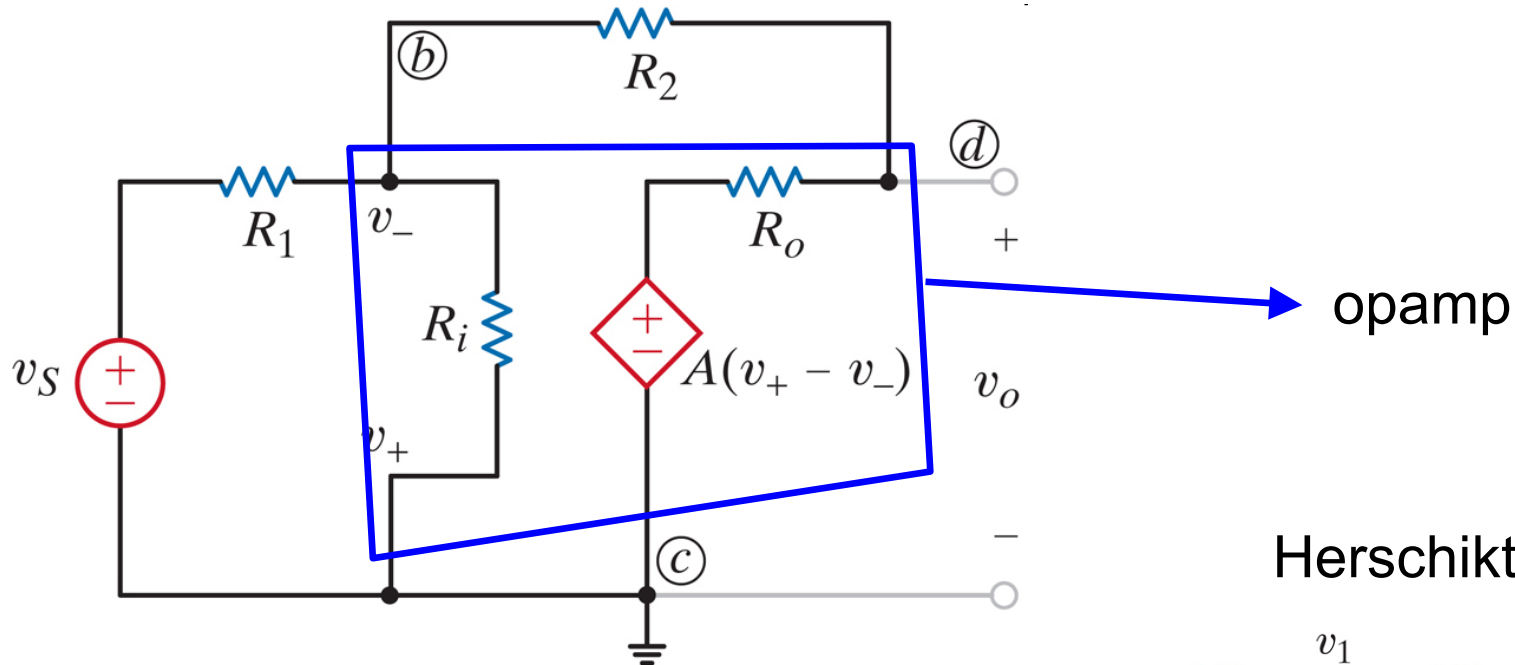
# Wat is de zin van een buffer?

- Wat is  $V_o$  in deze gevallen?

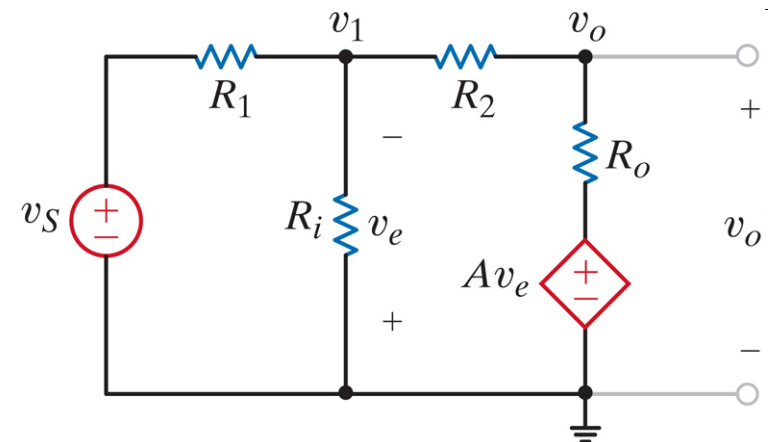




# Inverterende versterker – model (I)



Herschikt ...



- Dit is een netwerk zoals de andere ....

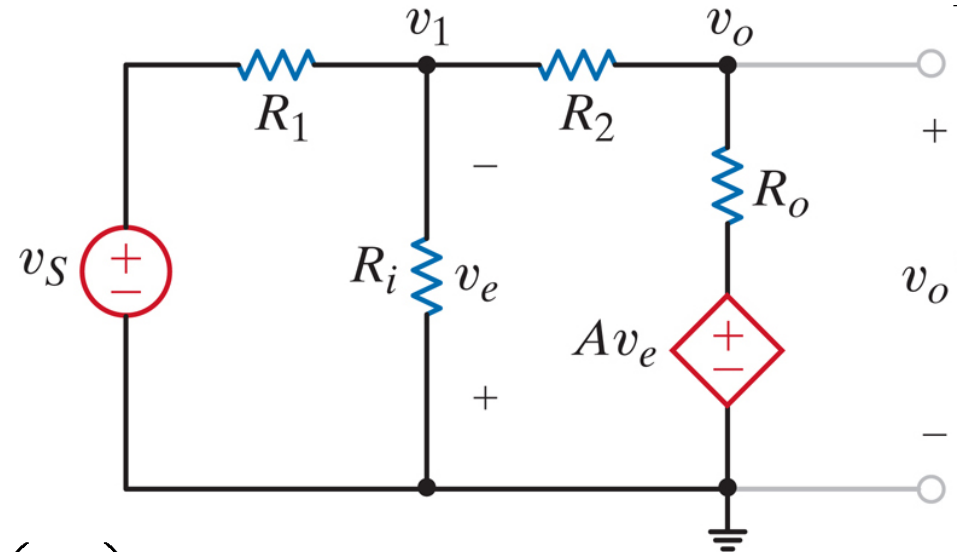


- knooppuntsanalyse

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1}{R_i} + \frac{v_1 - v_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_o - v_1}{R_2} + \frac{v_o - Av_e}{R_o} = 0$$

$$v_e = -v_1$$



- Oplossing

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{1 - \left[ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) \right] \left/ \left( \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right) \right]}$$

$$\frac{v_o}{v_S} = \frac{-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{1 - \left[ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) / \left( \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} \right) \right]}$$

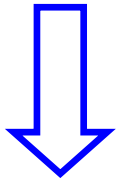
- Ideale opamp  $A \rightarrow \infty$ ,  $R_i \rightarrow \infty$

$$\lim_{A, R_i \rightarrow \infty} \left( \frac{v_o}{v_S} \right) = -\frac{R_2}{R_1}$$

Dit is omslachtig ....

- We veronderstellen ideaal vanaf het begin

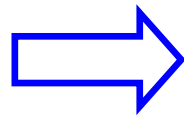
- $A \rightarrow \infty$
- $R_i \rightarrow \infty$



- $v_+ = v_-$   
 $v_1 = 0$

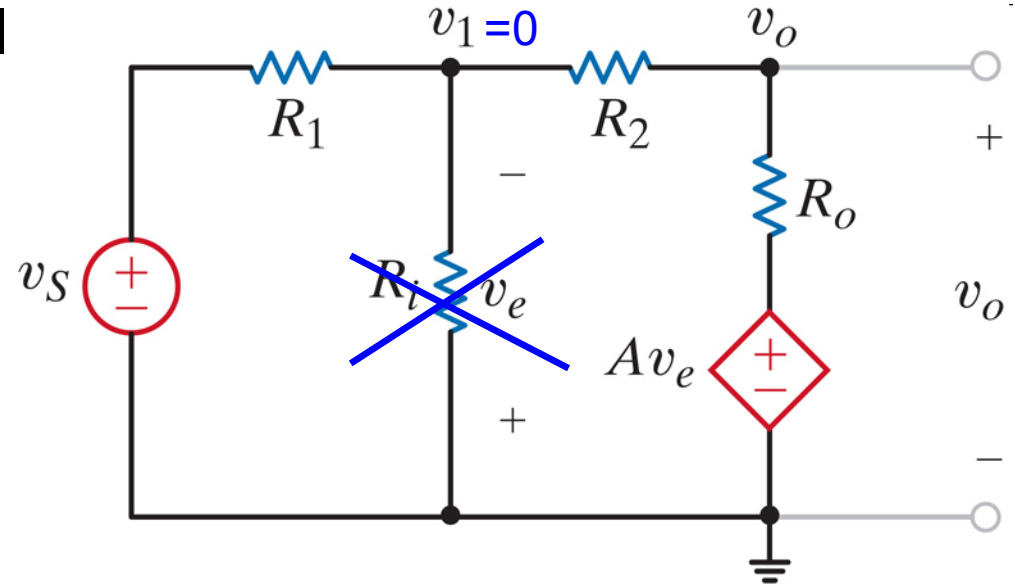
- KCL op de negatieve ingang  $v_1$

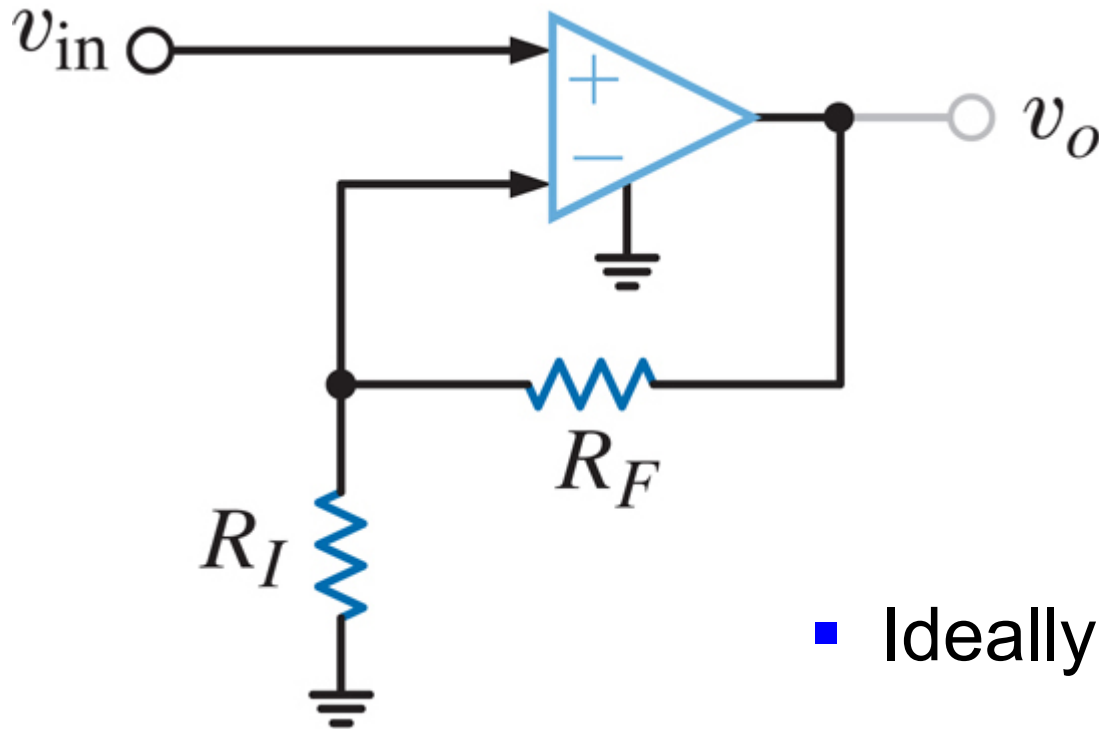
$$\frac{v_s - 0}{R_1} + \frac{v_o - 0}{R_2} = 0$$



$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1}$$

**Peanuts!**

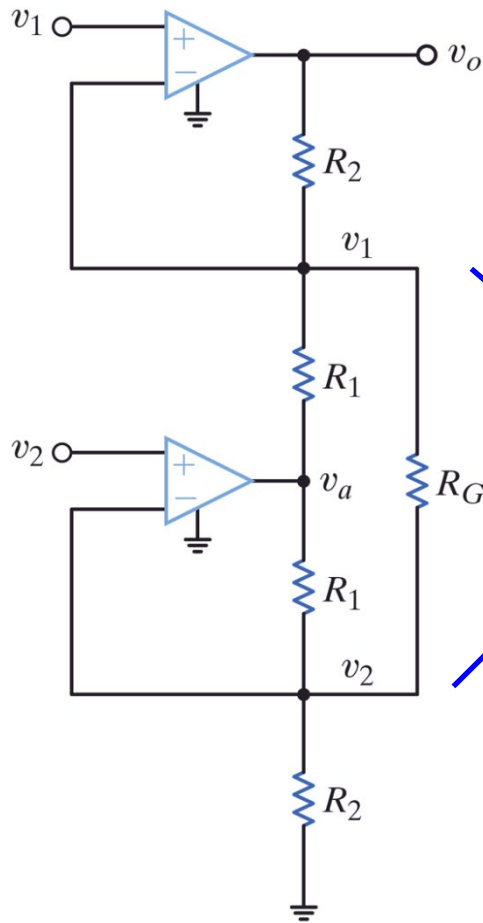




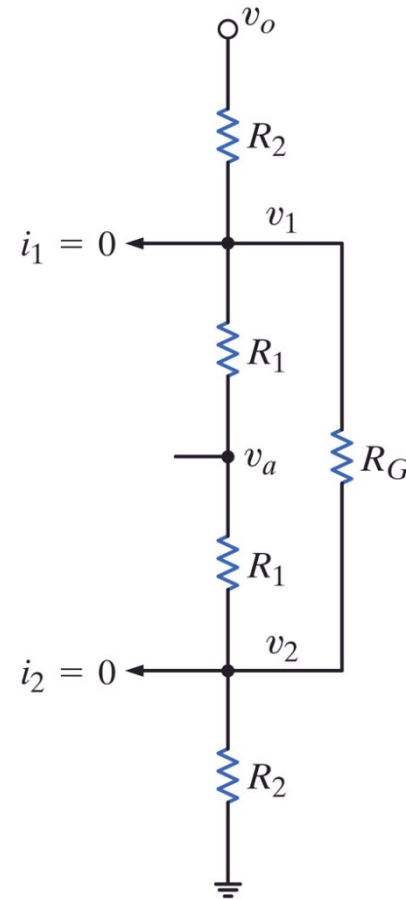
- Ideally ...

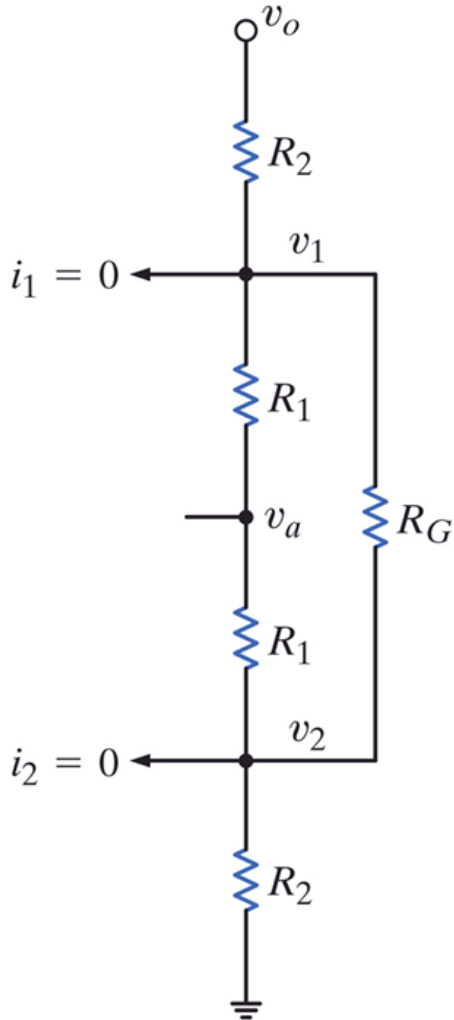
$$\frac{v_o}{v_{in}} = 1 + \frac{R_F}{R_I}$$

# Voorbeeld: instrumentatieverterker



Virtuele  
kortsluiting





Knooppuntsvergelijkingen voor  $v_1$  en  $v_2$

$$\frac{v_1 - v_0}{R_2} + \frac{v_1 - v_a}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_G} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_a}{R_1} + \frac{v_2 - v_1}{R_G} + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

Elimineer  $v_a$

$$v_o = (v_1 - v_2) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R_G} \right)$$

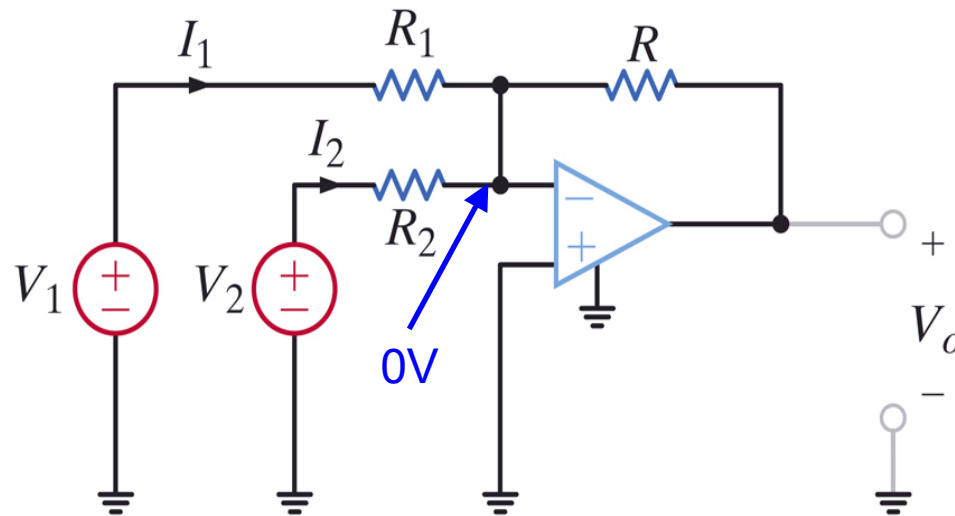
Instrumentatieversterker

=

verschilversterker

# Nog een voorbeeld: opteller

- Bereken  $R$ ,  $R_1$  en  $R_2$  zodat  $V_o = -0.9 \cdot V_1 - 0.1 \cdot V_2$  (gewogen som)
- Gebruik zo groot mogelijke weerstanden (vermogen!) maar niet groter dan  $10 \text{ k}\Omega$



$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{R_1} & I_2 &= \frac{V_2}{R_2} \\ I_1 + I_2 &= -\frac{V_o}{R} \end{aligned} \right\} V_o = -\left[\frac{R}{R_1}\right]V_1 - \left[\frac{R}{R_2}\right]V_2$$

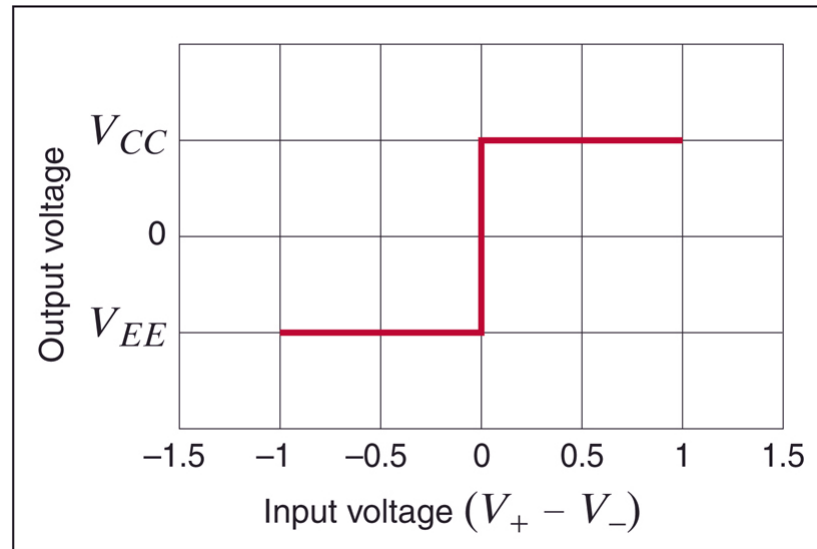
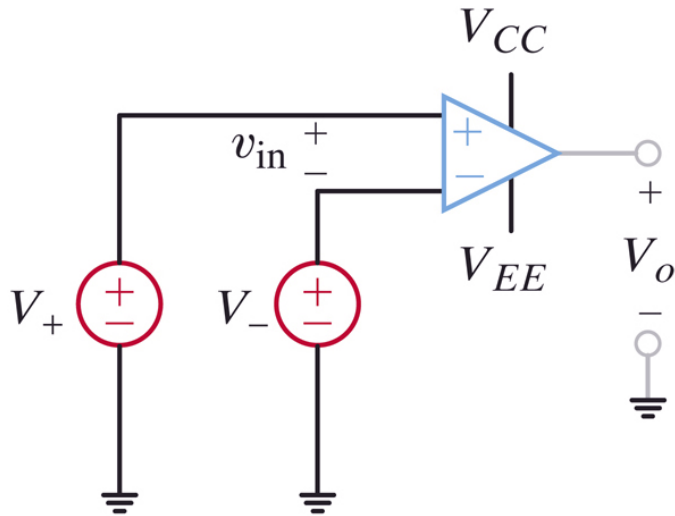
# Niet alle weerstanden bestaan ...

**TABLE 2.1** Standard resistor values for 5% and 10% tolerances (values available with a 10% tolerance shown in boldface)

1.0	10	100	1.0k	10k	100k	1.0M	10M
1.1	11	110	1.1k	11k	110k	1.1M	11M
1.2	12	120	1.2k	12k	120k	1.2M	12M
1.3	13	130	1.3k	13k	130k	1.3M	13M
1.5	15	150	1.5k	15k	150k	1.5M	15M
1.6	16	160	1.6k	16k	160k	1.6M	16M
1.8	18	180	1.8k	18k	180k	1.8M	18M
2.0	20	200	2.0k	20k	200k	2.0M	20M
2.2	22	220	2.2k	22k	220k	2.2M	22M
2.4	24	240	2.4k	24k	240k	2.4M	
2.7	27	270	2.7k	27k	270k	2.7M	
3.0	30	300	3.0k	30k	300k	3.0M	
3.3	33	330	3.3k	33k	330k	3.3M	
3.6	36	360	3.6k	36k	360k	3.6M	
3.9	39	390	3.9k	39k	390k	3.9M	
4.3	43	430	4.3k	43k	430k	4.3M	
4.7	47	470	4.7k	47k	470k	4.7M	
5.1	51	510	5.1k	51k	510k	5.1M	
5.6	56	560	5.6k	56k	560k	5.6M	
6.2	62	620	6.2k	62k	620k	6.2M	
6.8	68	680	6.8k	68k	680k	6.8M	
7.5	75	750	7.5k	75k	750k	7.5M	
8.2	82	820	8.2k	82k	820k	8.2M	
9.1	91	910	9.1k	91k	910k	9.1M	

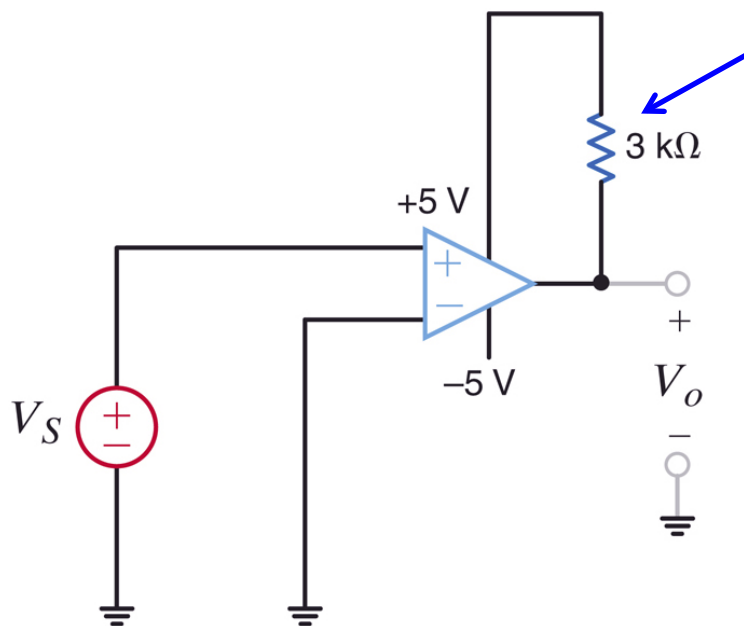
- Exacte oplossing voor dit geval
- $R=270\ \Omega$   
 $R_1=2700\ \Omega$   
 $R_2=300\ \Omega$
- Er zijn andere benaderingen mogelijk.



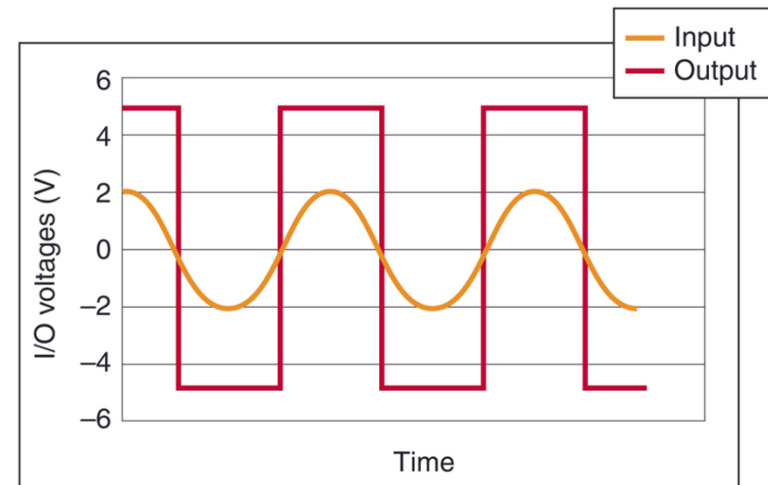


- Dit circuit geeft een hoge uitgangsspanning als  $V_+ > V_-$  en een lage in het ander geval
- Geen terugkoppeling  $\rightarrow$  niet lineair.

- Nuldoorgang detector



Veel comparator chips hebben een externe "pull up" weerstand nodig (bv. LM339)



Comparators zijn niet lineaire circuits → niet verder besproken in deze cursus

De flanken geven aan wanneer de sinusoidale spanning nul is. Gebruikt om inschakelen van netspanning te synchroniseren bv.

- Chapter 4 – Introduction to operational amplifiers
  - Volledig gezien, niet alle voorbeelden besproken



# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Hoofdstuk 5

### Extra Analysetechnieken

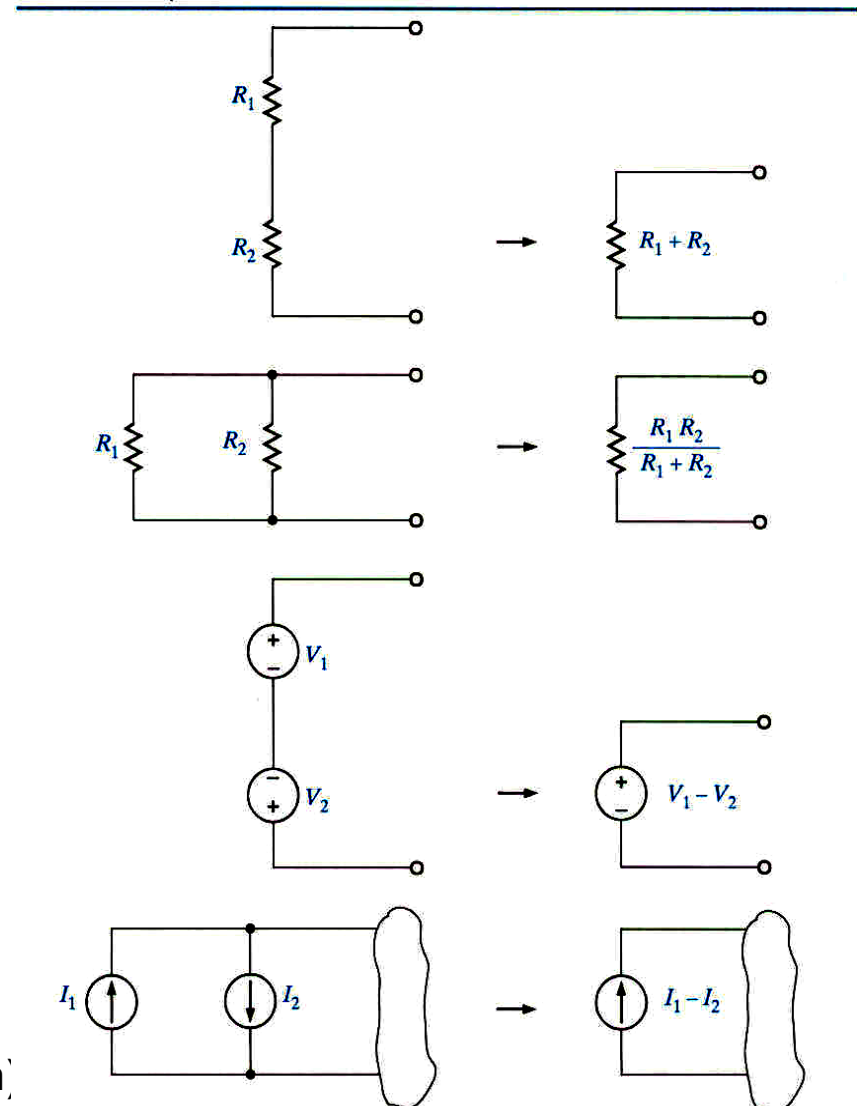
W. Dehaene

---

- Equivalentie
- Superpositie
- Thevenin/Norton
  
- Vergelijking van de technieken

- Met de analyse technieken die we gezien hebben kunnen we alle mogelijk resistieve problemen aan.
- Er zijn nog een aantal methodes die erg nuttig zullen blijken eenmaal er andere circuit elementen bijkomen.
- Het is echter eenvoudiger om de technieken aan te brengen met resistieve netwerken
- Op het einde van het hoofdstuk gaan we de gekende analyse technieken nog even op een rijtje zetten.

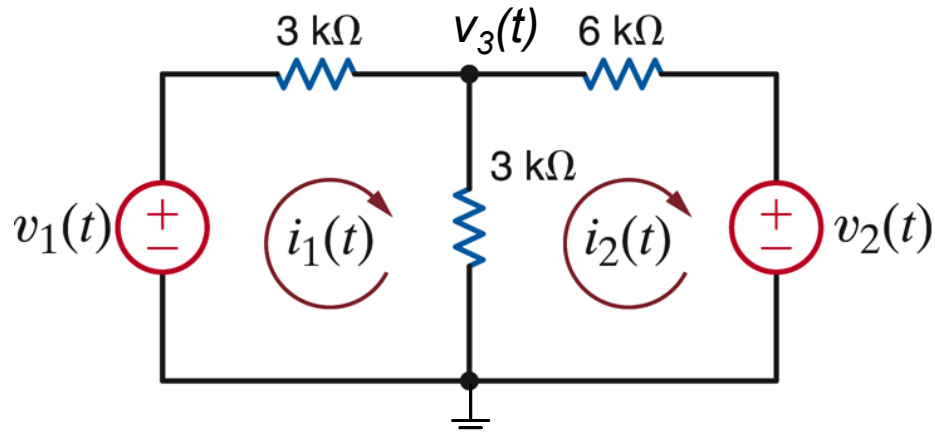
- Hebben we al gedaan!
- Circuits zijn equivalent als ze hetzelfde  $V, I$  gedrag vertonen.
- Het maakt dus niet uit welke van de twee je neemt.
- Wat met
  - Parallele spanningsbronnen?
  - Stroombronnen in serie?
 → gaat niet!



(Boek: ook nog lineariteit → laat maar even zitten)





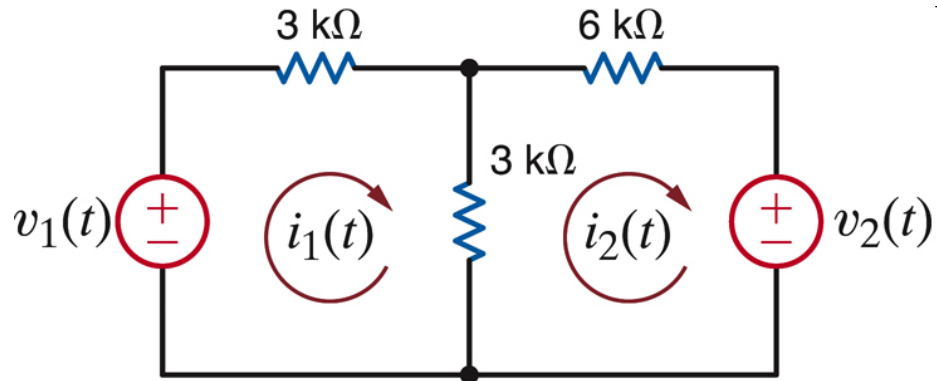


- We berekenen  $i_1$ , in boek via lusanalyse, kan ook met knooppuntsanalyse

$$\frac{v_3 - v_1}{3k} + \frac{v_3}{3k} + \frac{v_3 - v_2}{6k} = 0$$

$$v_3 = \frac{v_1}{3k} + \frac{v_2}{6k} \Big/ \left( \frac{2}{3k} + \frac{1}{6k} \right) = \frac{2}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2$$

$$i_1 = \frac{v_1 - v_3}{3k} = \frac{v_1 - \left( \frac{2}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 \right)}{3k} = \frac{1}{5k}v_1 - \frac{1}{15k}v_2$$



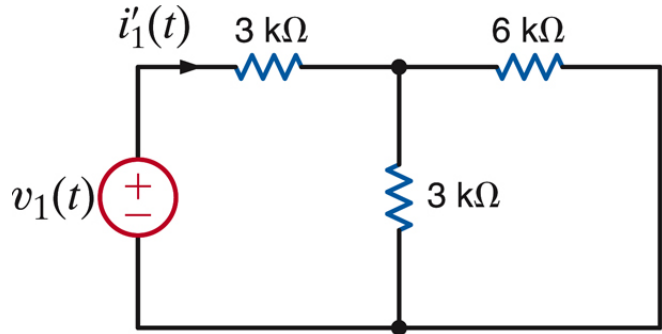
$$i_1 = \frac{1}{5k} v_1 - \frac{1}{15k} v_2$$

Twee stromen: bijdrage van  $v_1$  en van  $v_2$

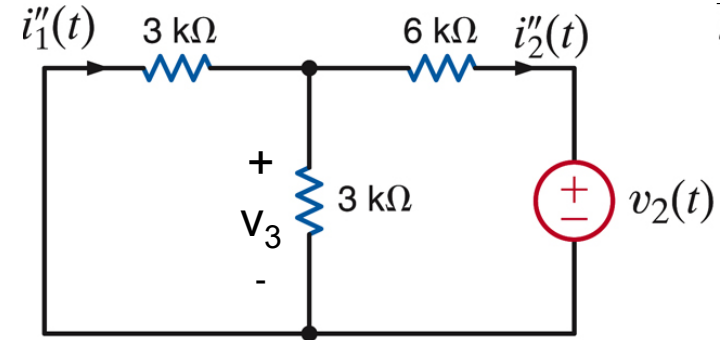
Zijn die bijdragen onafhankelijk?

Hangt de stroom die  $v_1$  veroorzaakt af van  $v_2$  en omgekeerd?

- Stel  $v_2=0 \rightarrow i_1'$ ?



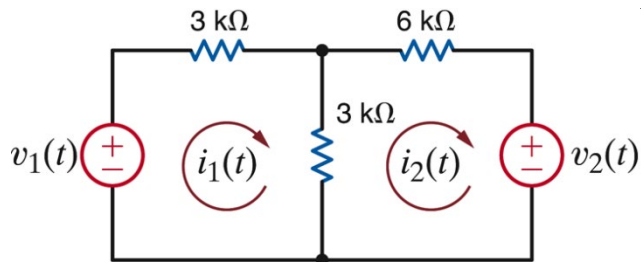
- Stel  $v_1=0 \rightarrow i_1''$ ?



$$i_1' = \frac{v_1}{3k + (3k // 6k)} = \frac{v_1}{5k}$$

$$v_3 = \frac{(3k // 3k)}{(3k // 3k) + 6k} v_2 = \frac{1.5}{7.5} v_2 = \frac{1}{5} v_2$$

$$i_1'' = \frac{-v_3}{3k} = -\frac{v_2}{15k}$$

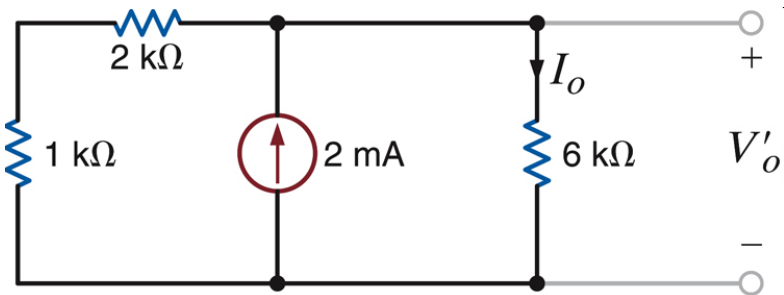
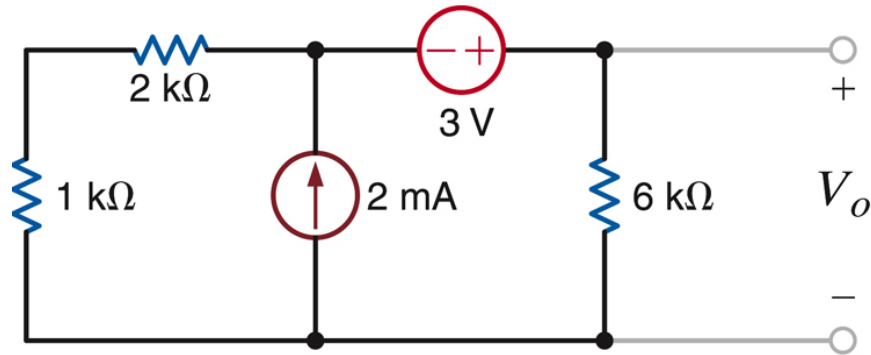


$$i_1 = \frac{1}{5k} v_1 - \frac{1}{15k} v_2$$

Superpositie !

- In een lineair circuit met meerdere onafhankelijke bronnen kan elke stroom of elke spanning berekend worden door de som te nemen van de overeenkomstige stromen of spanningen waarbij telkens 1 onafhankelijke bron behouden wordt en de andere onafhankelijke bronnen nul gesteld worden.
- $V\text{-bron}=0 \rightarrow$  kortsluiting
- $I\text{-bron}=0 \rightarrow$  open keten
  
- Lineair circuit = circuit met  $V$ ,  $I$ ,  $VDV$ ,  $IDV$ ,  $VDI$ ,  $IDI$  en  $R$  (for now ...)

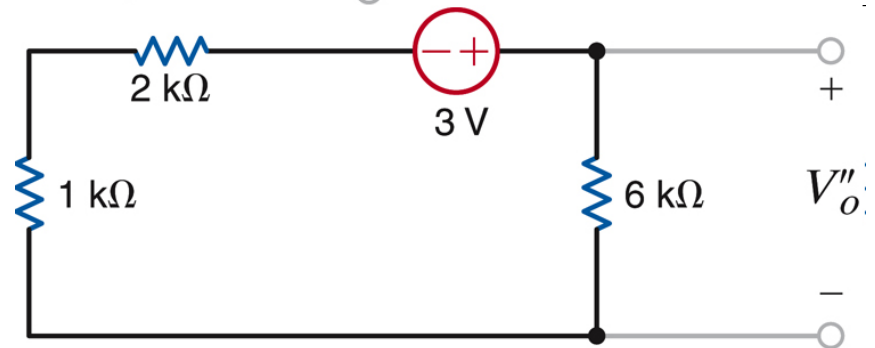
- Bereken  $V_o$



Stroomdeler

$$I_o = \frac{2k + 1k}{2k + 1k + 6k} 2 \cdot 10^{-3} = \frac{2}{3} \text{ mA}$$

$$V_o' = 6k \cdot I_o = 4V$$

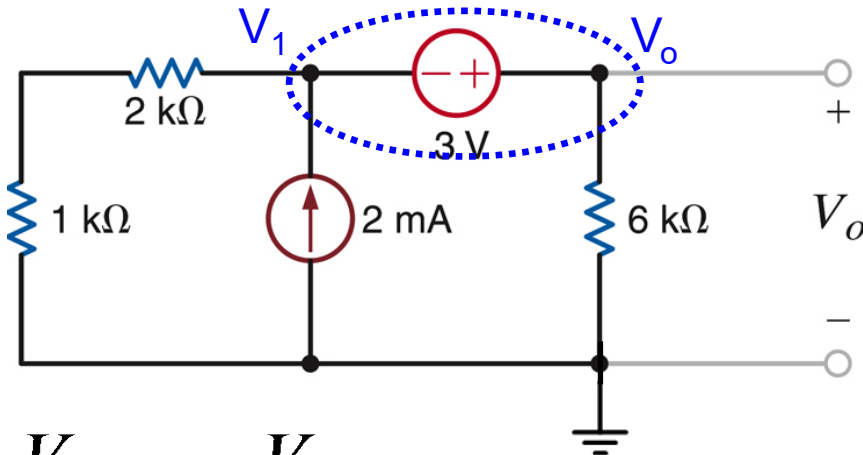


Spanningsdeler

$$V_o'' = \frac{6k}{6k + 2k + 1k} 3V = 2V$$

Superpositie  $V_o = V_o' + V_o'' = 6V$

- Check: via knooppuntsanalyse



$$\begin{cases} \frac{V_o}{6k} + \frac{V_1}{2k + 1k} - 2 \cdot 10^{-3} = 0 \\ V_o - V_1 = 3 \end{cases}$$

$$\frac{V_o}{6k} + \frac{V_o - 3}{3k} - 2 \cdot 10^{-3} = 0$$

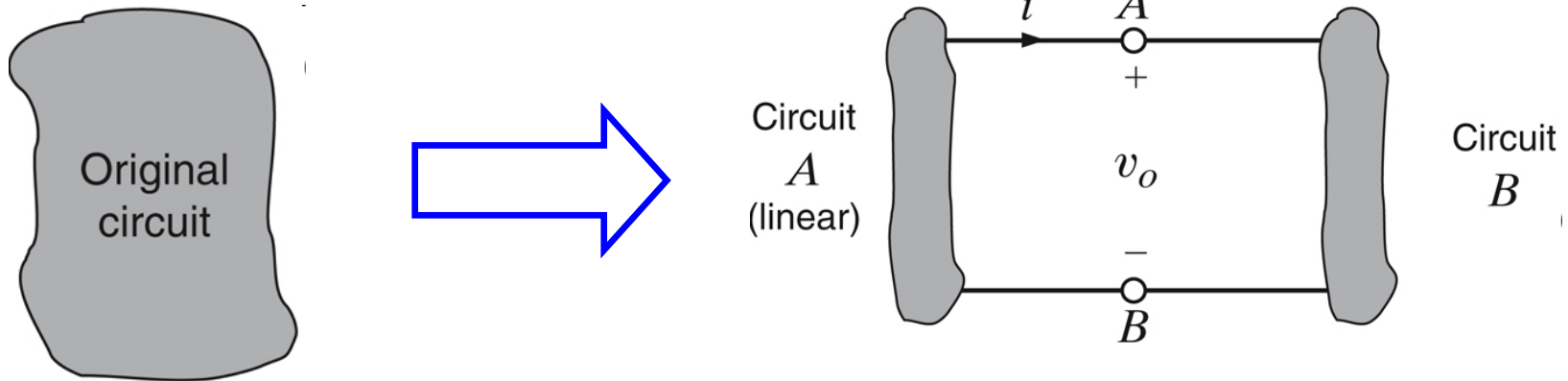
$$\frac{3V_o}{6k} + \frac{-1}{1k} - 2 \cdot 10^{-3} = 0$$

$$V_o = 2k(3 \cdot 10^{-3}) = 6V$$

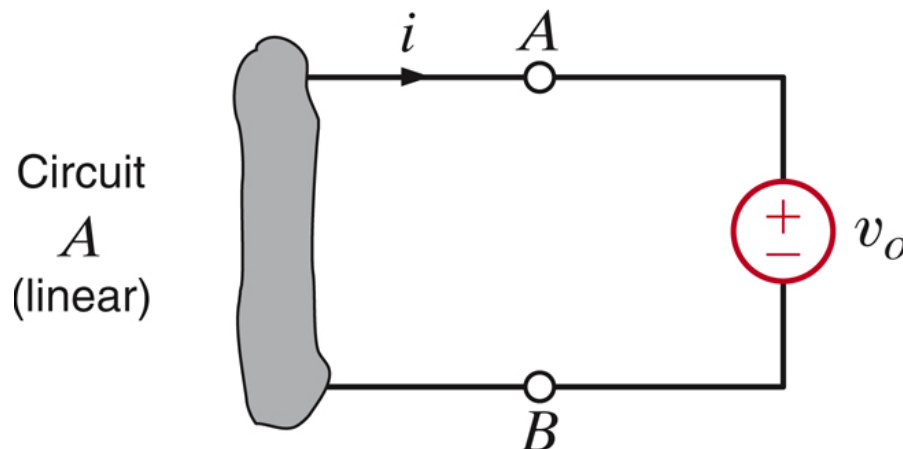
Klopt!!

# Laat ons eens experimenteren (I)

- We hebben een circuit en we splitsen het op knopen A, B



- Nu vervangen we circuit B door een spanningsbron  $v_o$



Dit verandert niets aan  $v_o$  en dus blijft ook  $i$  gelijk!

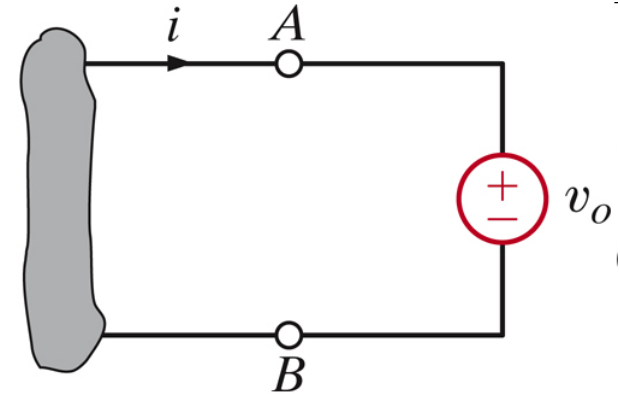
- Superpositie

$$i = i_0 + i_{sc}$$

→ Stroom bij  $v_0=0$   
(kortsluiting)

→ Stroom met alle bronnen  
in circuit A gelijk aan 0

Circuit  
A  
(linear)



- We schrijven  $i_0$  als

$$i_0 = \frac{-v_0}{R_{Th}}$$

→ Equivalente weerstand van circuit A  
met alle bronnen in A gelijk aan 0

- Dus

$$i = \frac{-v_0}{R_{Th}} + i_{sc}$$



# Laat ons eens experimenteren (III)

$$i = \frac{-v_0}{R_{Th}} + i_{sc} \longrightarrow \text{Geldig voor alle waarden van } i$$

- Speciaal geval: Als we de klemmen A en B open laten, is de stroom 0 en krijgen we de open klem spanning  $v_{oc}$

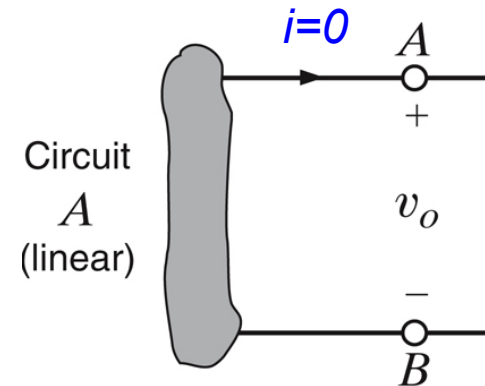
$$i = 0 = \frac{-v_{oc}}{R_{Th}} + i_{sc}$$

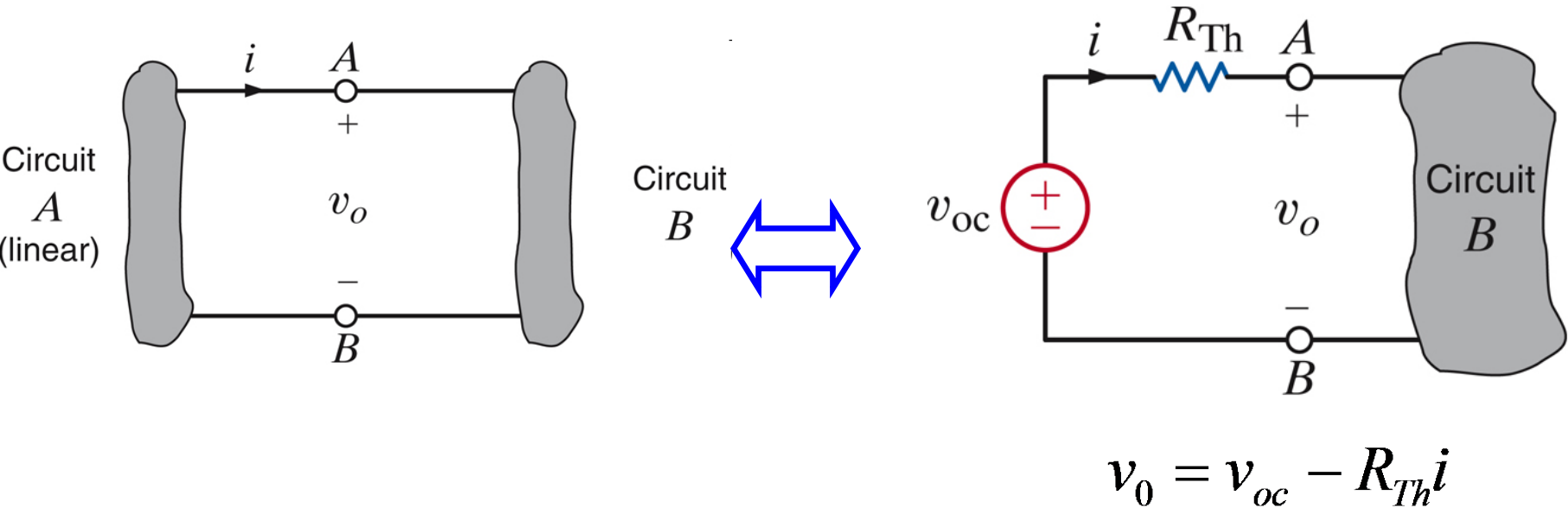
$$v_{oc} = R_{Th} \cdot i_{sc}$$

$$i = \frac{-v_0}{R_{Th}} + \frac{v_{oc}}{R_{Th}}$$

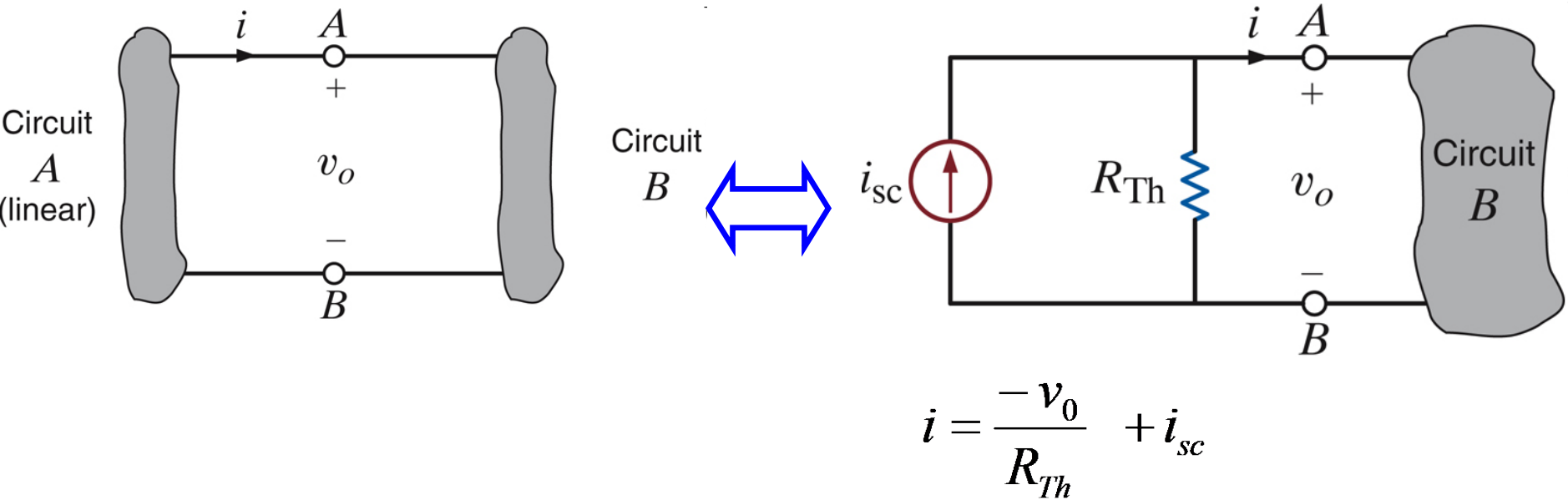
OF

$$v_0 = v_{oc} - R_{Th}i$$



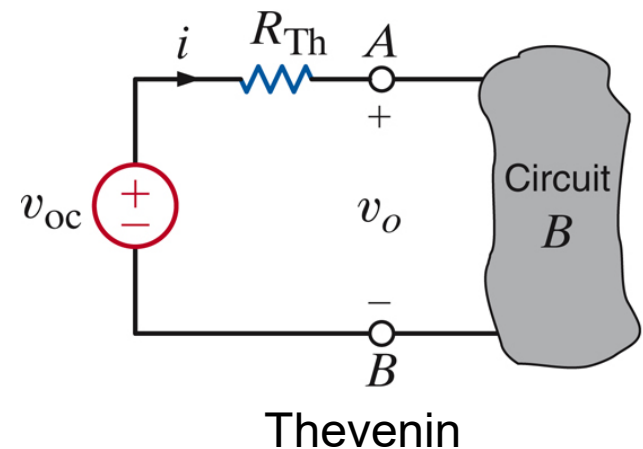
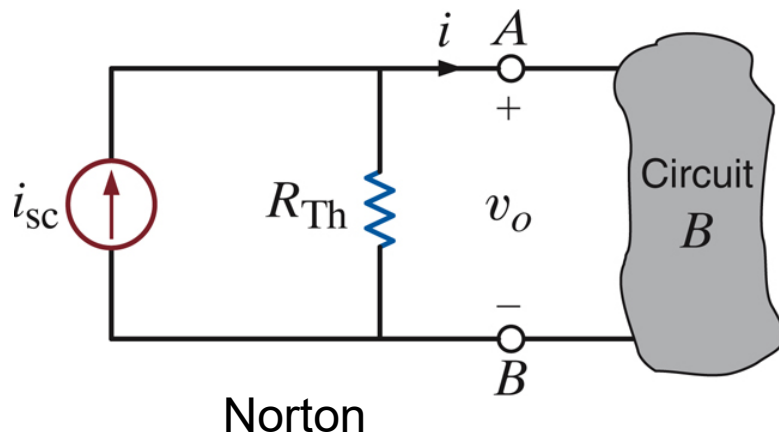


Thevenin equivalent circuit voor circuit A



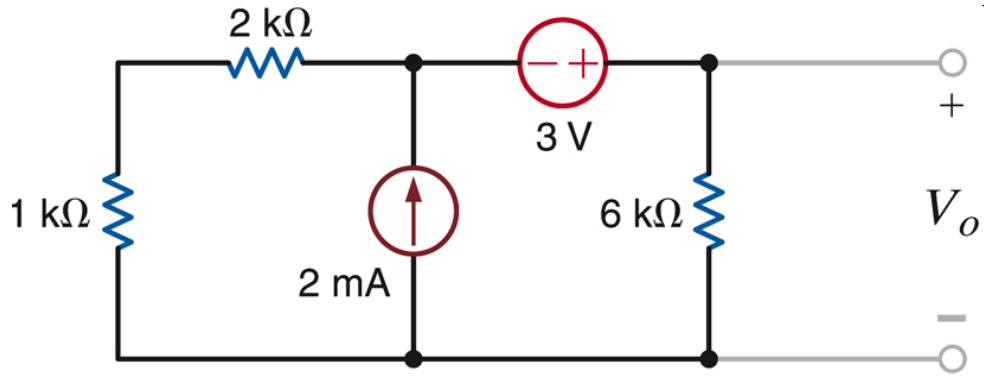
Norton equivalent circuit voor circuit A

- Ieder lineair circuit, hoe groot ook, kan vervangen worden door een onafhankelijke bron en een equivalente weerstand
  - Thevenin: onafhankelijke spanningsbron met serieweerstand
  - Norton: onafhankelijke stroombron met parallel weerstand

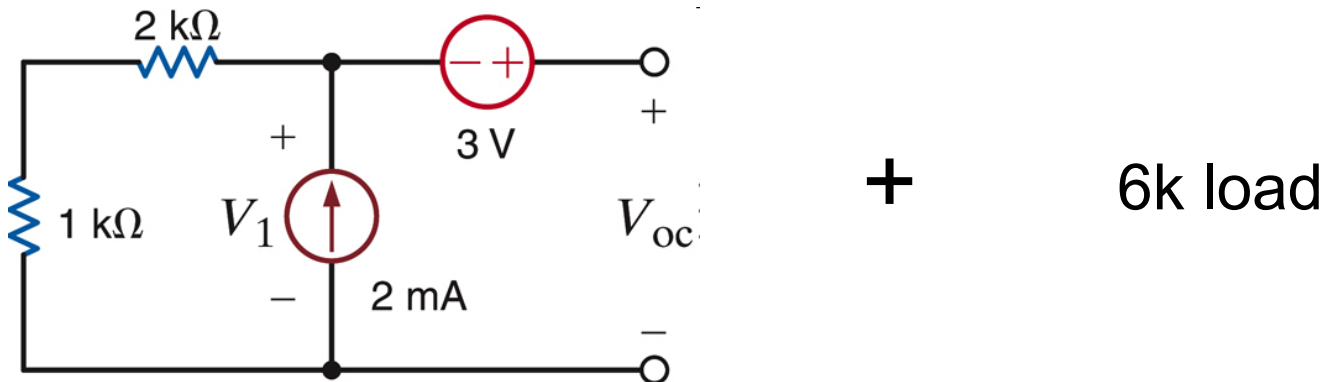


- We kunnen  $R_{Th}$ ,  $i_{sc}$  en  $v_{oc}$  berekenen en onze netwerken vereenvoudigen. Er zijn wat speciale gevallen en voorwaarden bij
  - Circuits met afhankelijke bronnen
  - (Deel)circuits zonder bronnen
  
- Enkele voorbeelden...

- $V_o$  berekenen met Thevenin

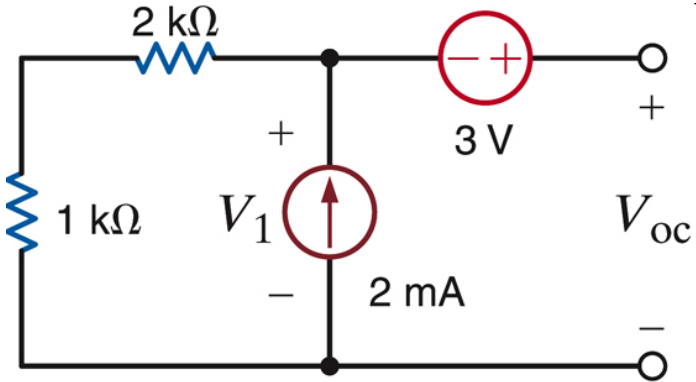


- Netwerk splitsen



# Voorbeeld 1 (II)

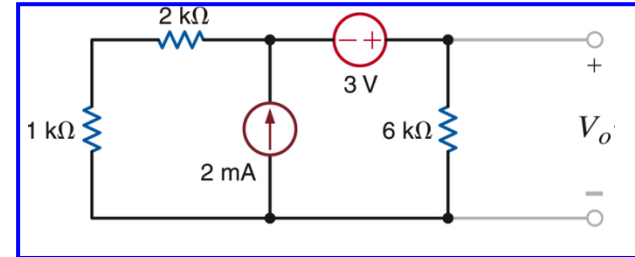
- $V_{oc}$  ?



$$V_{oc} = 3V + V_1$$

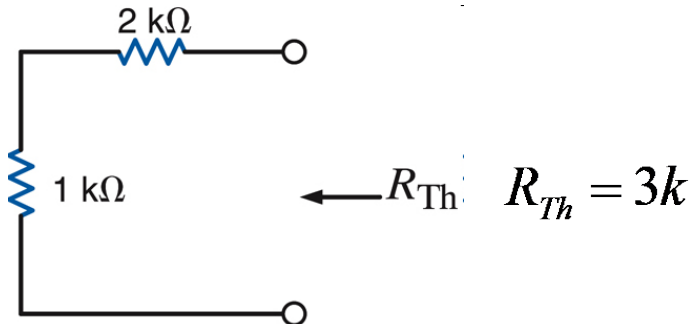
$$V_1 = (2k + 1k) \cdot 2mA = 6V \quad \text{Op zicht te zien}$$

$$V_{oc} = 9V$$

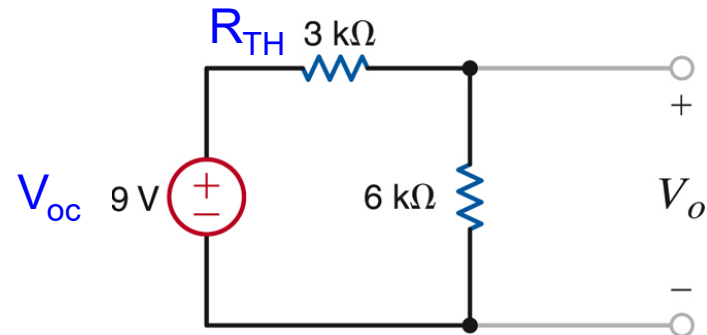


- $R_{Th}$  ?

Alle bronnen op 0



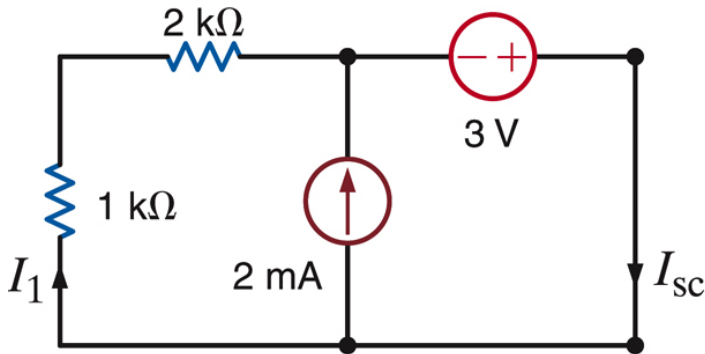
- Th equivalent terug verbinden



$$V_o = \frac{6k}{6k + 3k} 9V = 6V \quad (\text{spanningsdeler})$$

# Voorbeeld 1 (III) - Norton

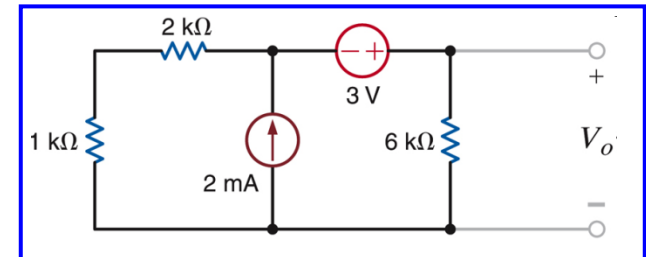
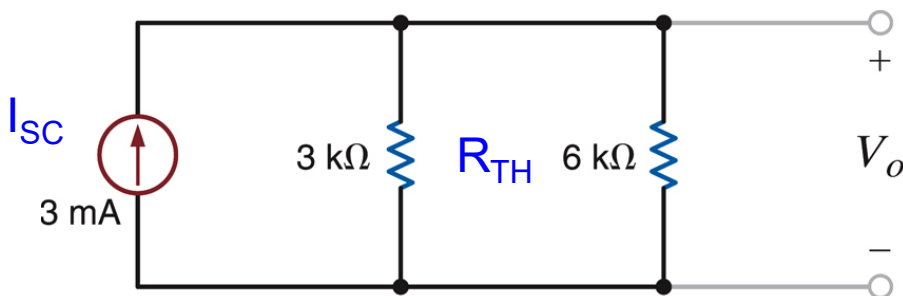
- Voor Norton equivalent  $\rightarrow$  kortsluitstroom  $I_{SC}$



$$I_1 = \frac{3}{2k + 1k} = 1mA$$

$$I_{SC} = 2mA + 1mA = 3mA$$

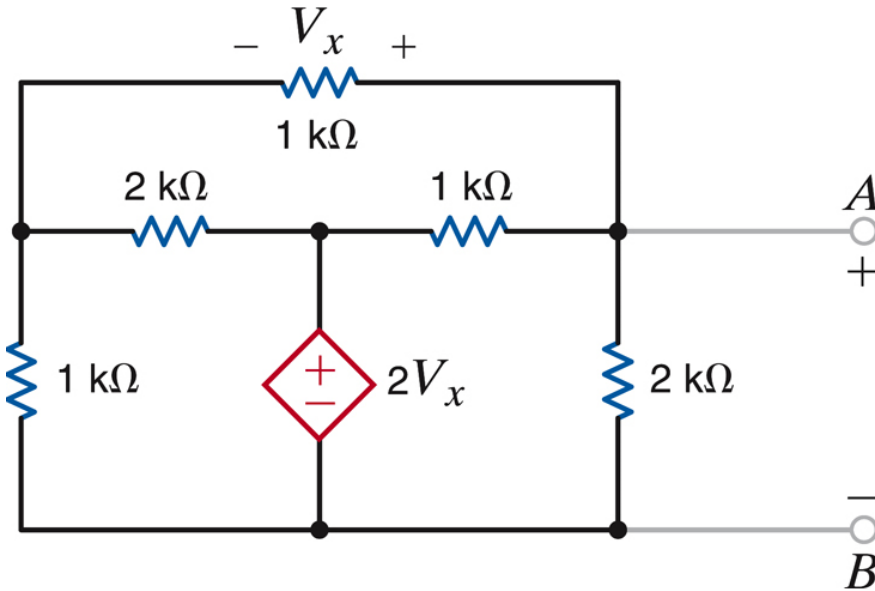
- Norton equivalent terug aansluiten



$$V_o = 3 \cdot (3k // 6k) = 6V$$

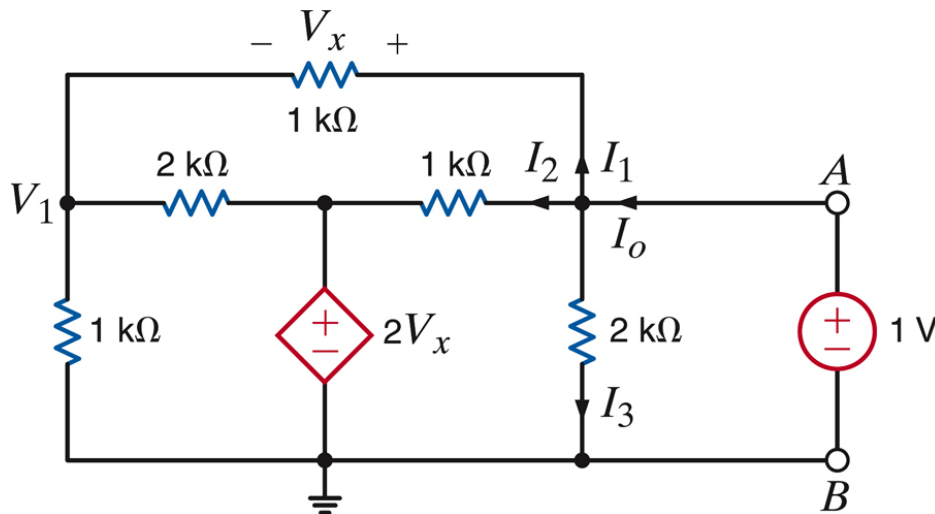
Idem als thevenin!!





- Thevenin equivalent gezien tussen A en B ?
- Door de afhankelijke bron kunnen we  $R_{Th}$  niet meer vinden door serie, parallelschakeling, ...
- $V_{oc}$  is 0 in dit geval.

- Om nu de equivalente weerstand te kennen leggen we een test spanning “ $V_{\text{test}}$ ” aan en we berekenen de stroom “ $I_{\text{test}}$ ”.  $R_{\text{Th}}$  is dan  $V_{\text{test}} / I_{\text{test}}$
- In het voorbeeld is  $V_{\text{test}} = 1\text{V}$ , we zoeken  $I_0$
- Dit kan ad-hoc, met knooppuntsanalyse, ...



KVL in de buitenste lus

$$V_x + V_1 = 1$$

KCL op knoop "V<sub>1</sub>"

$$\frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - 2V_x}{2k} + \frac{V_1 - 1}{1k} = 0$$

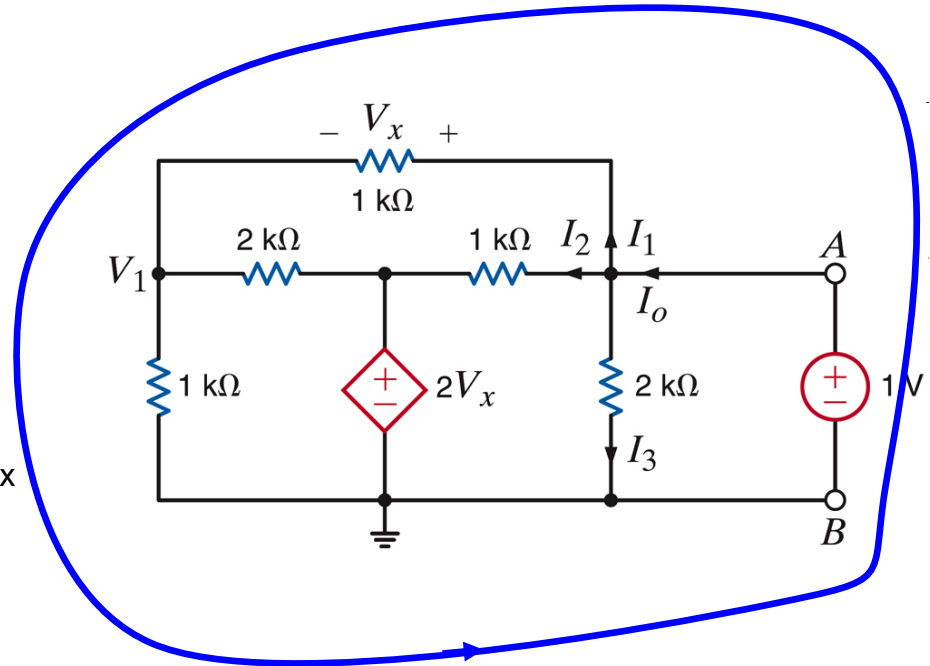
2 vgl en 2 onbekenden oplossen naar V<sub>x</sub>

$$V_x = 3/7 V$$

KCL/knooppuntsanalyse op knoop A

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3$$

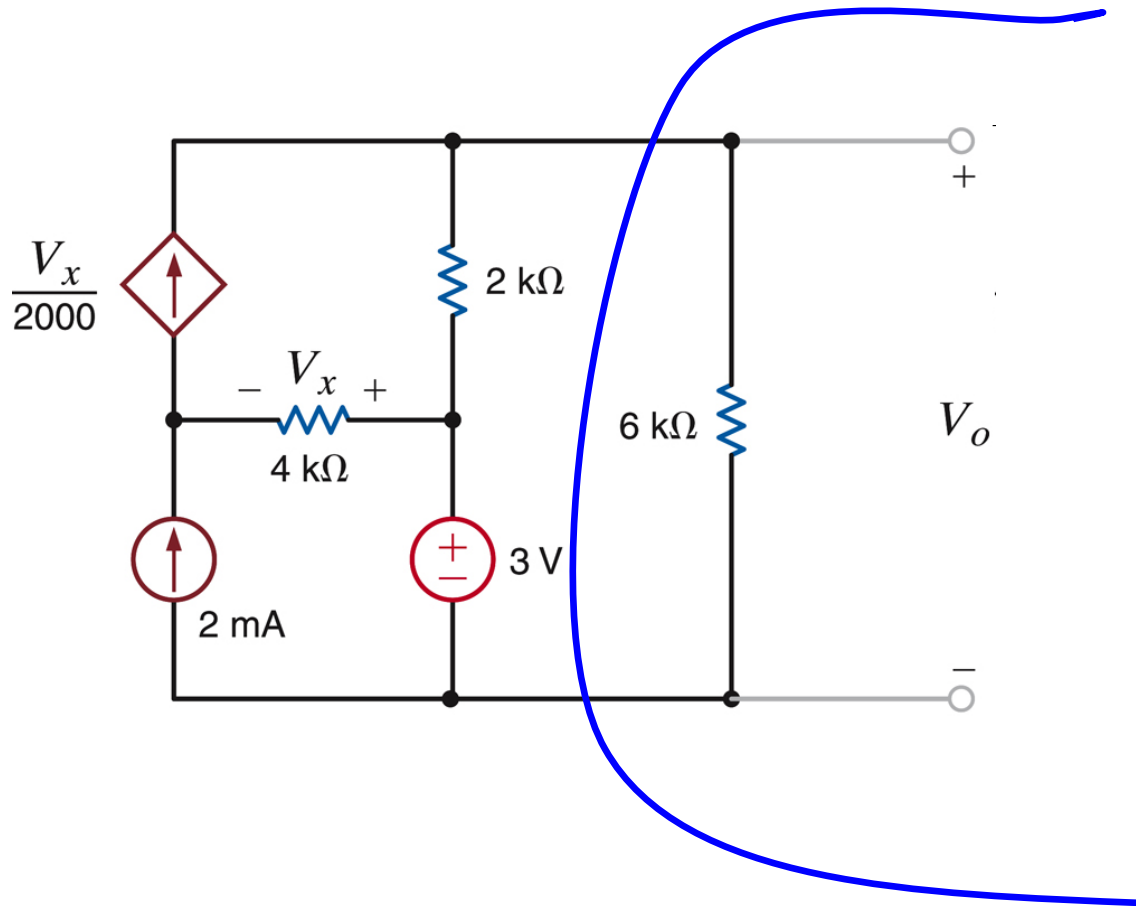
$$I_0 = \frac{V_x}{1k} + \frac{1 - 2V_x}{1k} + \frac{1}{2k} = \frac{15}{14} \text{ mA}$$



$$R_{TH} = \frac{1V}{I_0} = \frac{14}{15} k\Omega$$

Deze methode is altijd toepasbaar!

- $V_0$  via Thevenin ?



■  $V_{OC}$ ?

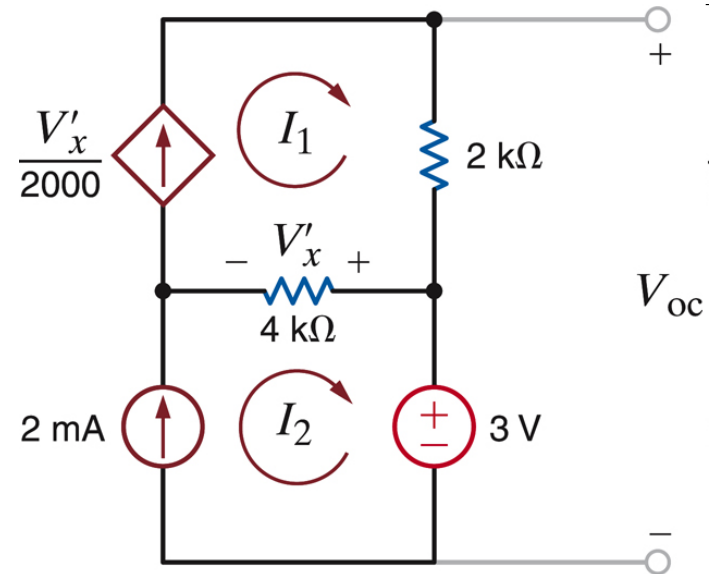
$$I_1 = \frac{V'_x}{2k}$$

$$I_2 = 2mA$$

$$V'_x = 4k(I_1 - I_2)$$

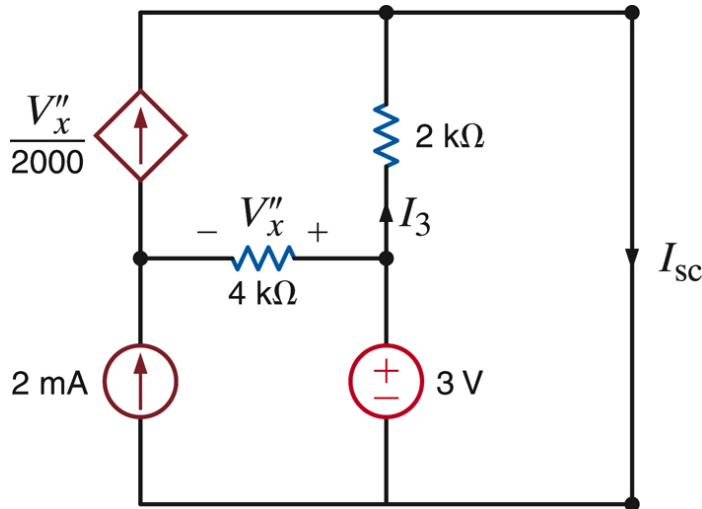
Hieruit volgt dat  $I_1 = 4 mA$

$$V_{OC} = 3 + 2k \cdot I_1 = 11V$$



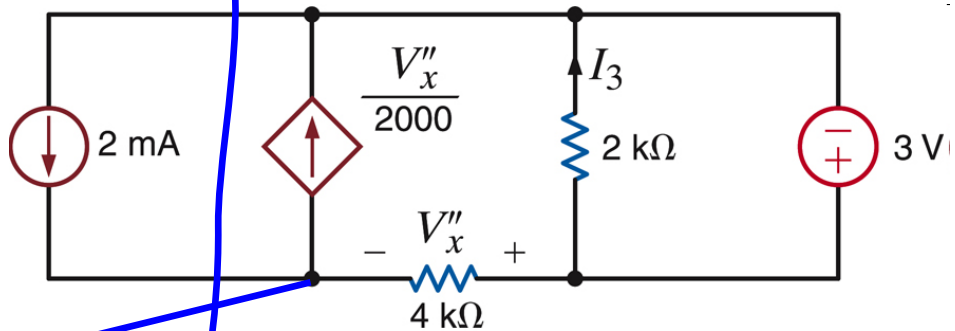
# Een voorbeeld met alles erop en eraan (III)

## ■ $I_{SC}$ ?



Anders  
getekend

Hier zie je  $I_{SC}$  niet meer  
Maar het redeneert beter



KCL

$$\frac{V_x''}{4k} = \frac{V_x''}{2k} - 2 \cdot 10^{-3}$$

$$V_x'' = 8V$$

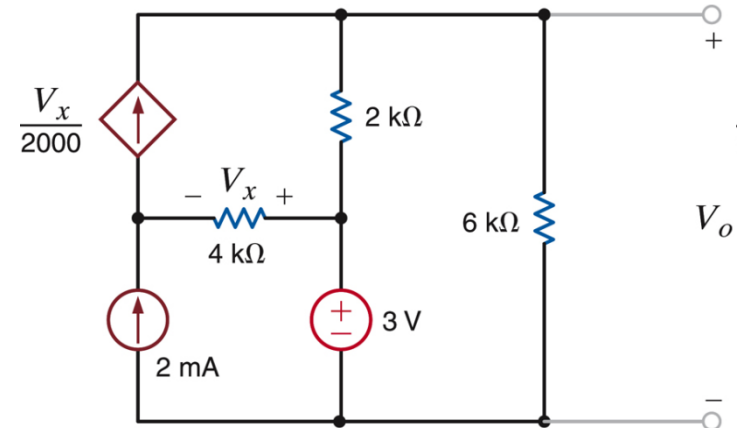
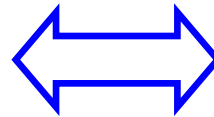
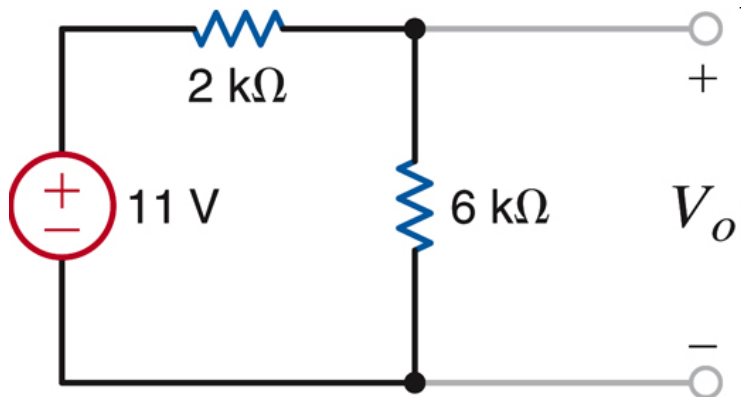
$$I_3 = \frac{3}{2k} = \frac{3}{2} mA$$

KCL

$$I_{SC} = \frac{V_x''}{2k} + I_3 = \frac{11}{2} mA$$

$$R_{Th} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = 2k\Omega$$

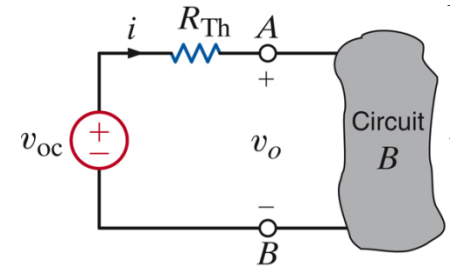
- Het Thevenin equivalent terug verbinden.



$$V_0 = \frac{6k}{2k + 6k} 11 = \frac{33}{4} V$$

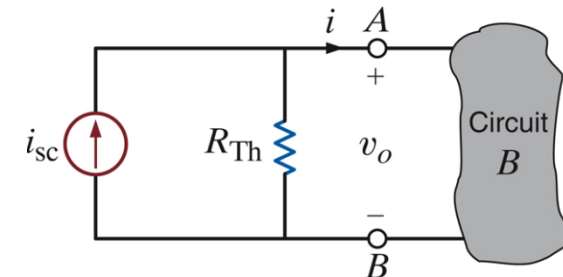
## ■ Thevenin

- $V_{OC}$  Open klem spanning berekenen via eender welke analyse methode
- $R_{TH}$ 
  - Via serie, parallel schakeling (enkel als geen afhankelijke bronnen)
  - Via  $I_{SC}$  (zie Norton),  $R_{TH} = V_{OC} / I_{SC}$
  - Met  $V_{test} / I_{test}$  methode



## ■ Norton

- $I_{SC}$  Kortsluitstroom berekenen via eender welke analyse methode
- $R_{TH}$ 
  - Via serie, parallelschakeling (enkel als geen afhankelijke bronnen)
  - Via  $V_{OC}$  (zie Thevenin),  $R_{TH} = V_{OC} / I_{SC}$
  - Met  $V_{test} / I_{test}$  methode





## ■ Gesloten methodes

- Deze methodes werken altijd maar zijn niet altijd het kortst
- Knooppuntsanalyse
  - KCL + extras voor spanningsbronnen
  - Meest gebruikt bv. in SPICE
  - Gemakkelijkst om te bepalen hoeveel vergelijkingen/onbekenden je nodig hebt
  - Geeft knoopspanningen, daarna kunnen de takstromen berekend worden
- Lusanalyse
  - KVL + extras voor stroombronnen
  - Omslachtiger omdat # onbekenden/vergelijkingen moeilijker in te schatten valt
  - Geeft lusstromen. Daarna kunnen de knoopspanningen berekend worden. (via takstromen)

- Ad hoc methodes (trukendoos)
  - Hier moet je op basis van eigen inzicht bepalen hoe je het juist gaat aanpakken. Kan veel efficiënter zijn, maar je moet het zien ...
  - Serie en parallelschakeling
  - Spannings- en stroomdelers
  - KCL, KVL, Ohm
  - Superpositie
  - Thevenin & Norton  
(vooral nuttig later om tijdsconstanten te vinden)

- 5.1 introduction
  - Equivalentie gezien. Lineariteit niet
- 5.2 Superposition
  - Gezien
- 5.3 Thevenin en Norton equivalenten
  - Gezien
- 5.4 maximum power transfer
  - Niet gezien
- 5.5 dc SPICE analysis using schematic capture
  - Niet gezien
- 5.6, 5.7 voorbeelden niet expliciet gezien



# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Hoofdstuk 6

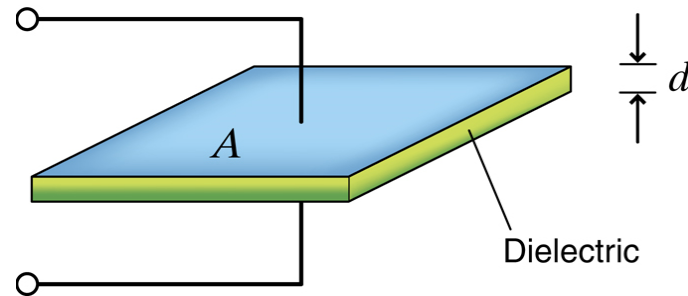
## Condensatoren en Spoelen

W. Dehaene

---

- Condensators
- Spoelen
- Combinaties van condensatoren en spoelen
  
- Kort hoofdstuk
  - Slechts “circuit view” op condensator en spoelen
  - Fysica van de condensator en de spoel komt aan bod in het vak fysica

- Twee geleiders en een isolator ertussen



- Capaciteit is het verband tussen de lading op de platen van de condensator en spanning erover. Eenheid: Farad (F)

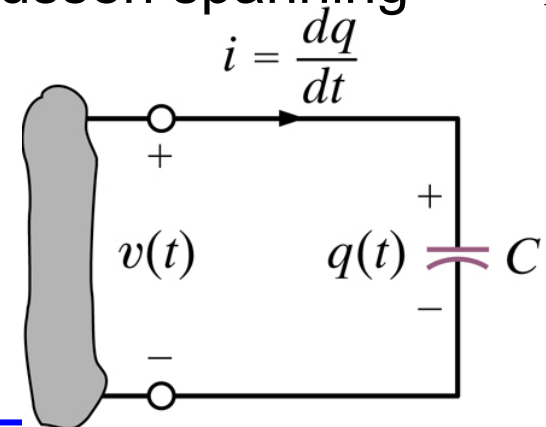
$$q = Cv$$

- Voor circuitanalyse moeten we het verband tussen spanning en stroom kennen

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = \frac{d(Cv)}{dt}$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

- Integreren vanaf  $-\infty$  is niet praktisch.

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(x) dx + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx$$

↓  
Gekende beginspanning van de capaciteit op tijdstip  $t_0$



- Vermogen

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}$$

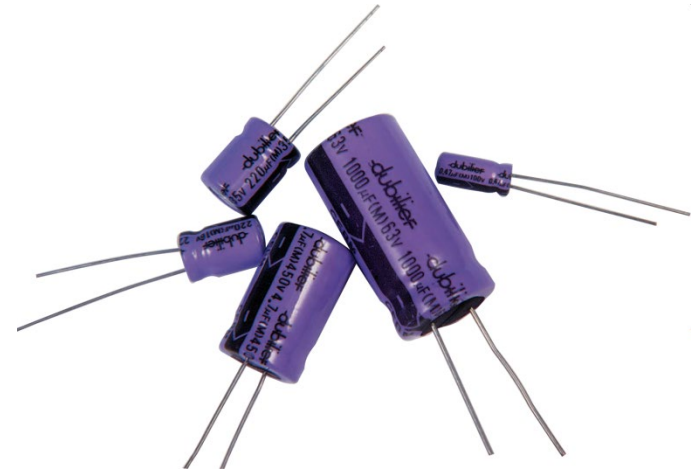
- Energie

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^t p(t) = \int_{-\infty}^t Cv(x)\frac{dv(x)}{dx} dx$$

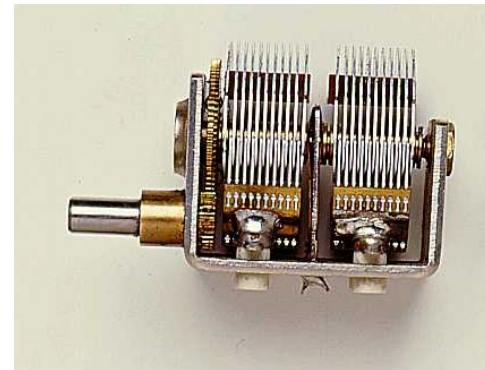
$$w_c(t) = \int_{v(-\infty)}^{v(t)} Cv(x)dv(x) = \frac{1}{2}Cv^2(x) \Big|_{v(x)=v(-\infty)}^{v(x)=v(t)}$$

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

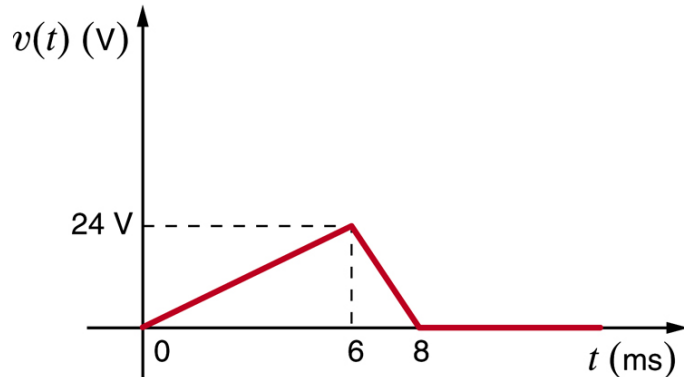




Normale waarden  
Chip 1fF tot 100 pF  
Pcb tot 1pF tot 1000 µF  
Groot tot 1F



- C van  $5 \mu\text{F}$ . Wat is  $i(t)$ ?



$$v(t) = 24 \frac{t}{6 \cdot 10^{-3}} \quad 0 \leq t \leq 6\text{ms}$$

$$= 24 \left( 1 - \frac{t - 6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \right) \quad 6 \leq t \leq 8\text{ms}$$

$$= 0 \quad t \geq 8\text{ms}$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = (5 \cdot 10^{-6})(4 \cdot 10^3) = 20 \text{ mA} \quad 0 \leq t \leq 6\text{ms}$$

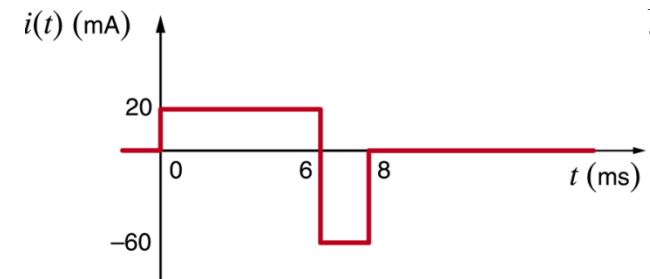
$$= (5 \cdot 10^{-6})(-12 \cdot 10^3) = -60 \text{ mA} \quad 6 \leq t \leq 8\text{ms}$$

$$= 0 \quad t \geq 8\text{ms}$$

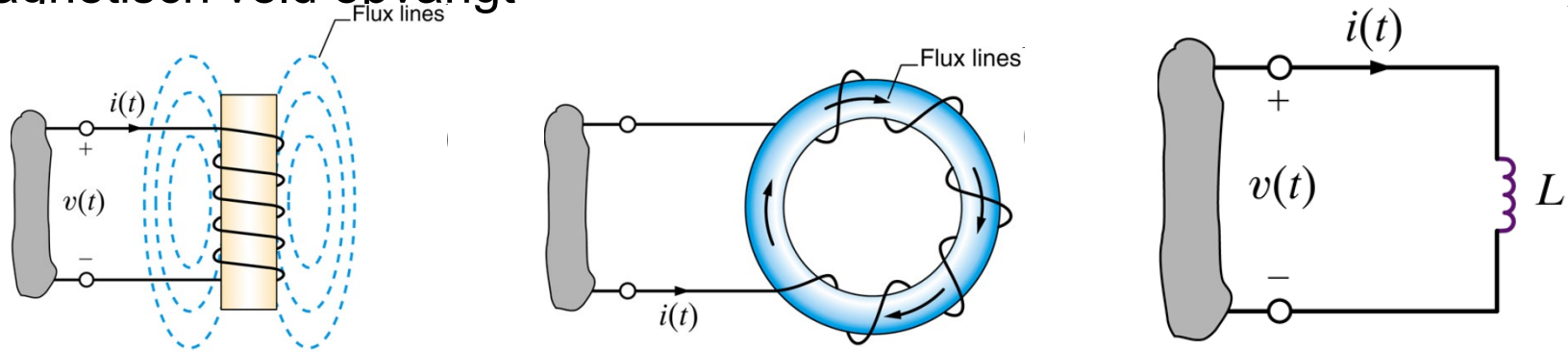
$$0 \leq t \leq 6\text{ms}$$

$$6 \leq t \leq 8\text{ms}$$

$$t \geq 8\text{ms}$$



- Een geleider die zijn eigen magnetisch veld opvangt



- Magnetisch veld is proportioneel aan de verandering van de stroom die het veld veroorzaakt. De evenredigheid tussen deze stroomverandering in de spoel en de spanning over de spoel is de inductantie  $L$ . Eenheid: Henry (H)

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

# Stroom vs spanning voor spoelen

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx$$

- Integreren vanaf  $-\infty$  is niet praktisch.

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(x) dx + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx$$

Gekende beginstroom door de spoel op tijdstip  $t_0$



- Vermogen

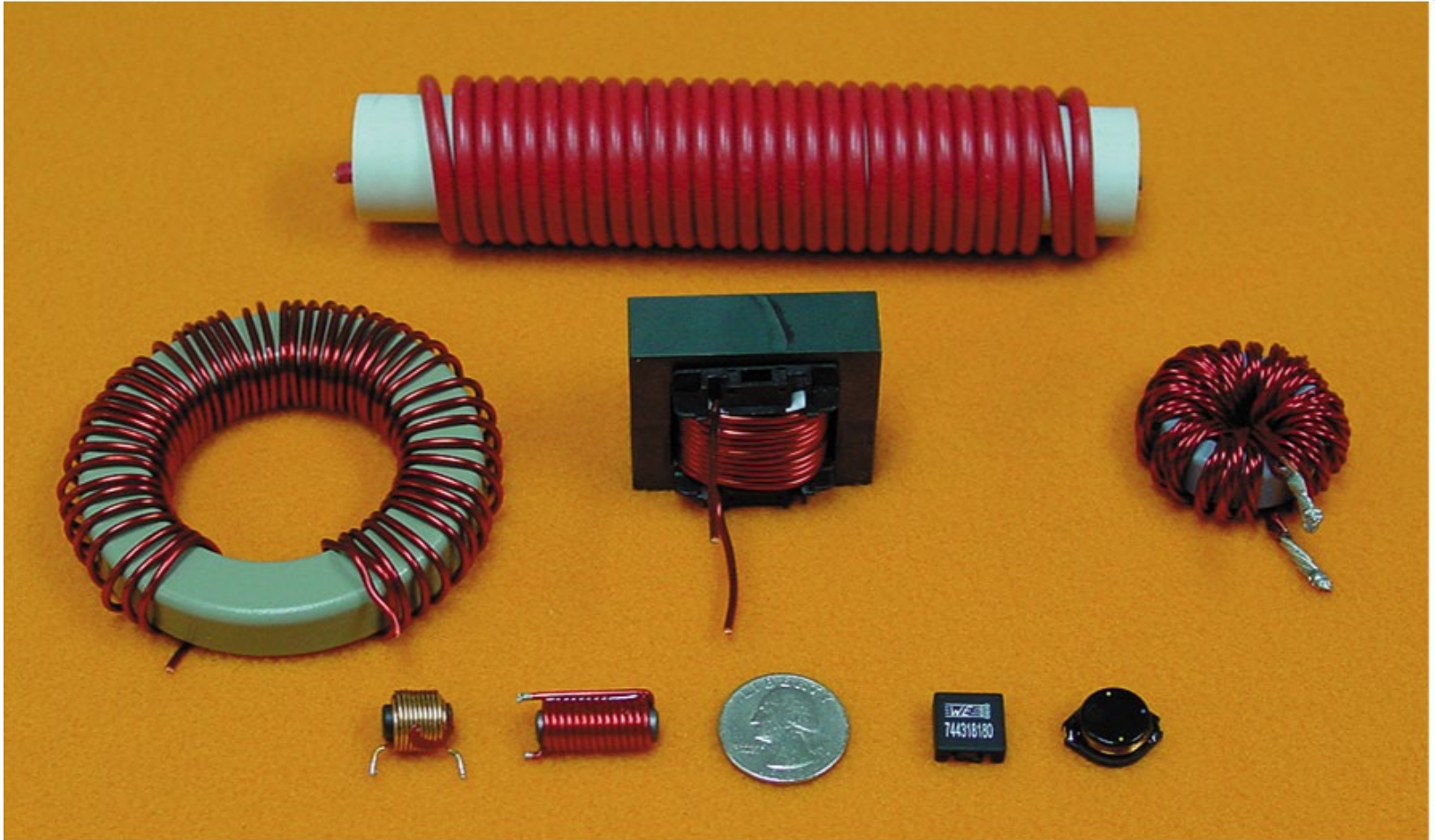
$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

- Energie

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p(t) = \int_{-\infty}^t Li(x)\frac{di(x)}{dx} dx$$

$$w_L(t) = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} Li(x)di(x) = \frac{1}{2} Li^2(x) \Big|_{i(x)=i(-\infty)}^{i(x)=i(t)}$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$$



Normale waarden: chip 1..10 nH, pcb 100 mH, groot 10H

- Condensator

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

- Bij gelijkspanning  $dv/dt = 0 \rightarrow i=0$
- De condensator is een open circuit voor gelijkspanning
- Bij gelijkstroom ( $i$  is constant) blijft de spanning op de condensator lineair toenemen

---

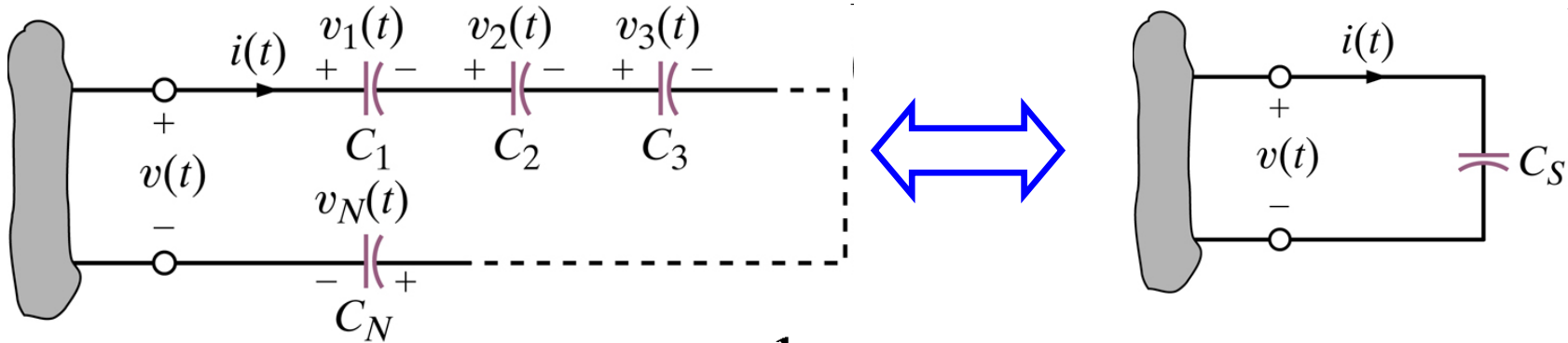
## Dualiteit

- Spoel

$$v = L \frac{di}{dt}$$

- Bij gelijkstroom  $di/dt = 0 \rightarrow v=0$
- De spoel is een kortsluiting voor gelijkspanning
- Bij gelijkspanning ( $v$  is constant) blijft de stroom door de spoel lineair toenemen

- De equivalente C?



$$v(t) = v_1 + v_2 + \dots + v_N(t) \quad v_i(t) = \frac{1}{C_i} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_i(t_0)$$

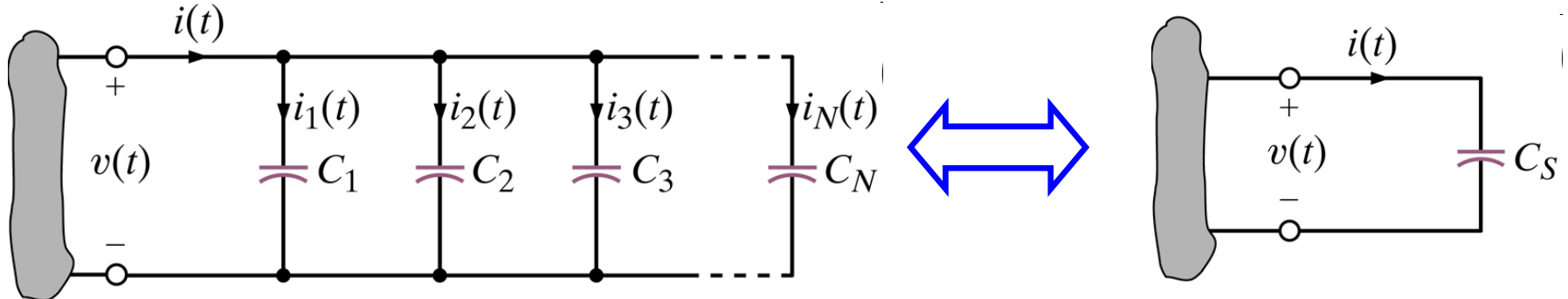
$$v(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_i(t_0) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + \sum_{i=1}^N v_i(t_0)$$

$$v(t) = \frac{1}{C_S} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0)$$

$$\frac{1}{C_S} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right)$$



- De equivalente C?



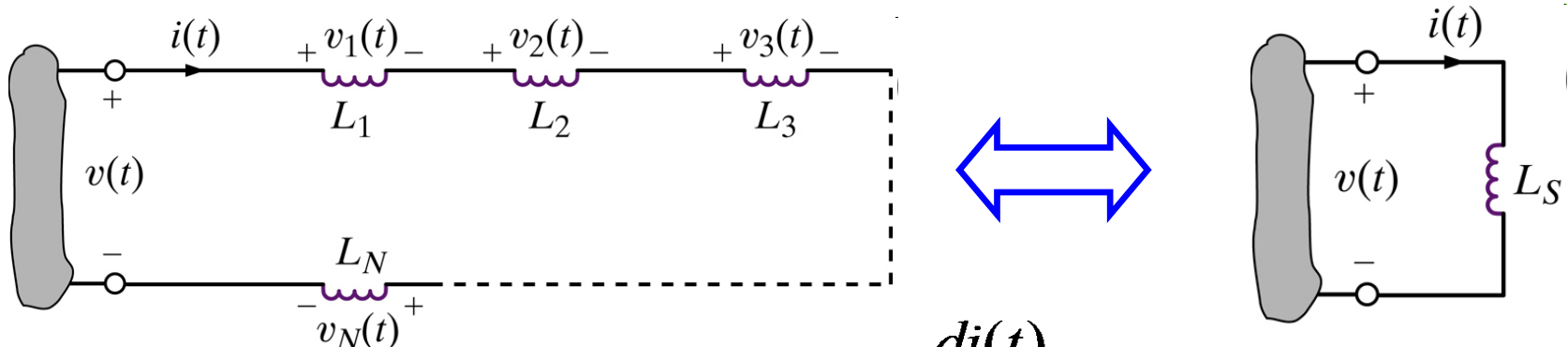
$$i(t) = i_1 + i_2 + \dots + i_N(t) \quad i_k(t) = C_k \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = \sum_{k=0}^N \left( C_k \frac{dv(t)}{dt} \right) = \left( \sum_{k=0}^N C_k \right) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_P \frac{dv(t)}{dt}$$

$$C_P = \sum_{k=1}^N C_k$$

- De equivalente L?



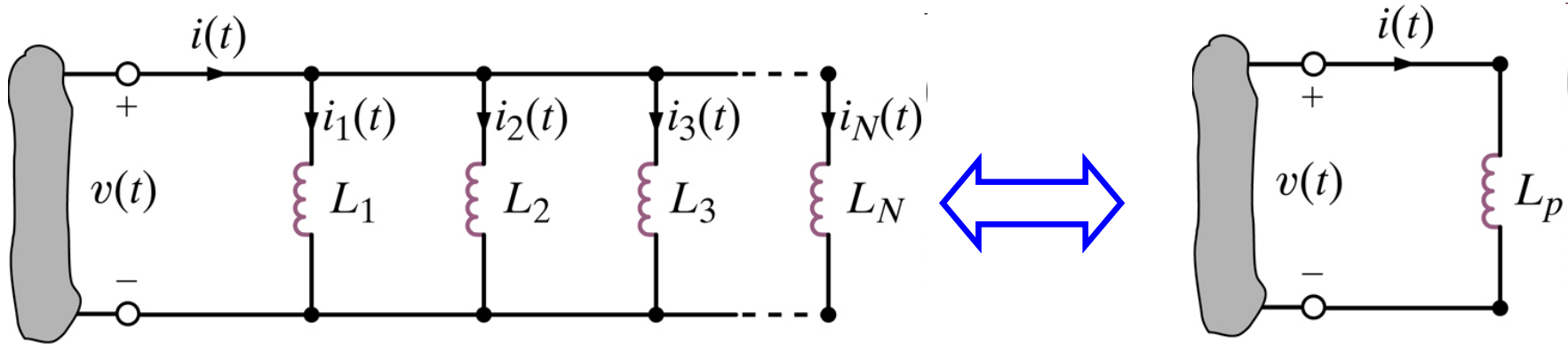
$$v(t) = v_1 + v_2 + \dots + v_N(t)$$

$$v_i(t) = L_i \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^N L_k \frac{di(t)}{dt} = \left( \sum_{i=1}^N L_k \right) \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = L_S \frac{di(t)}{dt}$$

$$L_S = \left( \sum_{i=1}^N L_i \right)$$



$$i(t) = i_1 + i_2 + \dots + i_N(t) \quad i_j(t) = \frac{1}{L_j} \int_0^t v(x) dx + i_j(t_0)$$

$$i(t) = \sum_{j=0}^N \left( \frac{1}{L_j} \int_0^t v(x) dx + i_j(t_0) \right) = \left( \sum_{j=0}^N \frac{1}{L_j} \right) \int_0^t v(x) dx + \sum_{j=0}^N i_j(t_0)$$

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{L_j}$$

$$i(t) = \frac{1}{L_p} \int_0^t v(x) dx + i(t_0)$$

- 6.1 Capacitors
  - Gezien
- 6.2 Spoelen
  - Gezien
- 6.3 Capacitor and Inductor combinations
  - Gezien
- 6.4 RC operational amplifier circuits
  - Niet Gezien
- 6.5 en 6.6 zijn voorbeelden



# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Hoofdstuk 7

### Eerste en Tweede orde circuits

### Spanningsgestuurde schakelaars

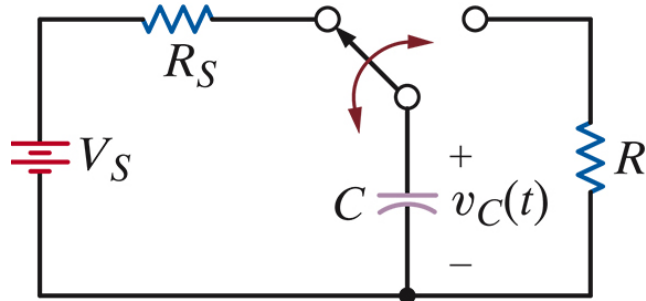
W. Dehaene

---

- Inleiding
- Eerste orde circuits
- Tweede orde circuits
- Spanningsafhankelijke schakelaars

- We gaan circuits maken met weerstanden, spoelen en condensatoren
  - Eerste orde: een element met energie opslag, één L of één C
  - Tweede orde: een L en een C
  
- De onafhankelijke bronnen zijn nog steeds DC
  
- We gaan overgangsverschijnselen (transients) bekijken.
  - Het circuit is in evenwicht.
  - Er wordt ergens in het circuit een schakelaar verzet
  - Wat gebeurt er in het circuit om tot een nieuw evenwicht te komen

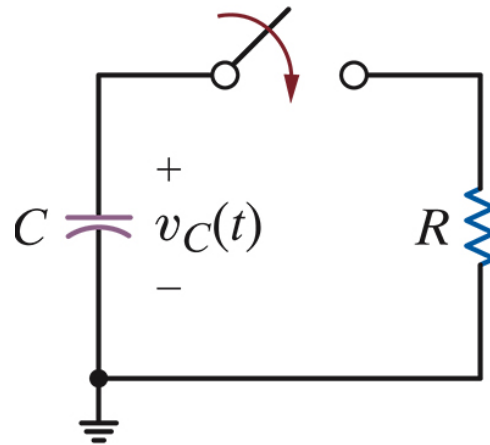
# Een voorgerechtigje – Flitslamp (I)



[(R) Xenon lamp]

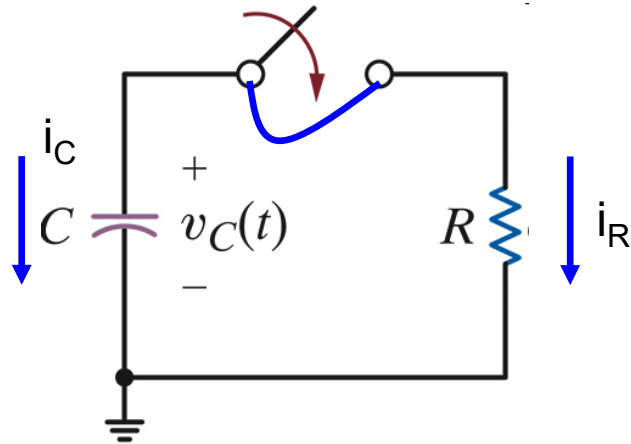
- De schakelaar staat al heel lang links.
- Het circuit is dan in evenwicht als  $v_C = V_S$

- De schakelaar wordt naar rechts gezet “Flits”
- Equivalent circuit:





# Een voorgerechtigje – Flitslamp (II)



## ■ Knooppuntsanalyse

$$i_C + i_R = 0$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = 0$$

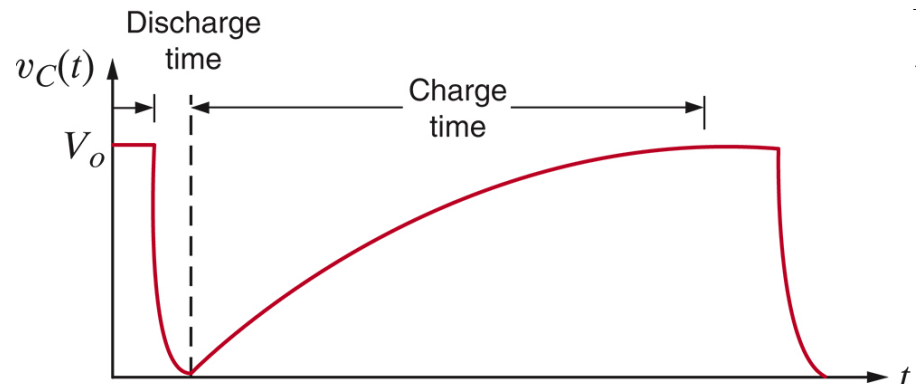
Differentiaal  
vergelijking



## ■ Oplossing is van de vorm

$$v_C(t) = V_o e^{\frac{-t}{RC}}$$

- $V_o$  : beginspanning op de C
- $RC$  : bepaalt de tijd waarmee de condensator op of ontlaaft



- Circuits met een C of een L
- Beschreven met een lineaire, 1<sup>e</sup> orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten [Zie analyse 1]

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

- Oplossing kan geschreven worden als

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

$x_p$  is een particuliere oplossing van de vergelijking (forced response)

$x_c$  is een oplossing van de homogene vergelijking (natural response)

- We werken met constante spanningen en stromen (DC) dus de twee vergelijkingen zijn

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = A$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0$$

- Particuliere oplossing?
- Vul constante  $K_1$  in?

$$\frac{d(K_1)}{dt} + aK_1 = A \Rightarrow K_1 = \frac{A}{a}$$

- homogene oplossing?

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0$$

$$\frac{dx_c(t)/dt}{x_c(t)} = -a$$

$$\frac{d}{dt} [\ln x_c(t)] = -a \Rightarrow \ln x_c(t) = \int -a dt = -at + c^{te}$$

$$x_c(t) = K_2 e^{-at}$$

Algemene oplossing

$$x(t) = -\frac{A}{a} + K_2 e^{-at}$$

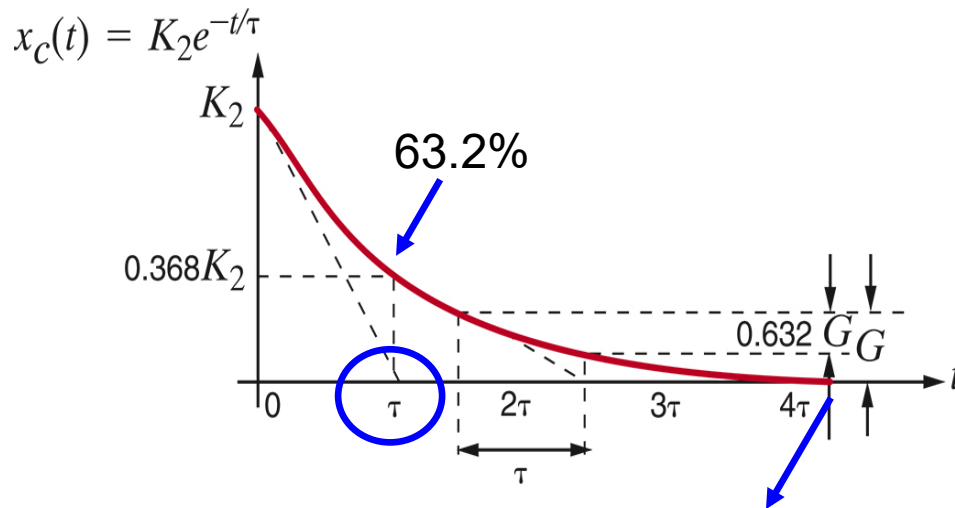
$K_2$  kan berekend worden als  $x(t)$  gekend is op een moment in de tijd (beginwaarde)

Alle andere methodes om differentiaalvergelijking op te lossen zijn ook toepasbaar!

- Algemene vorm van de oplossing

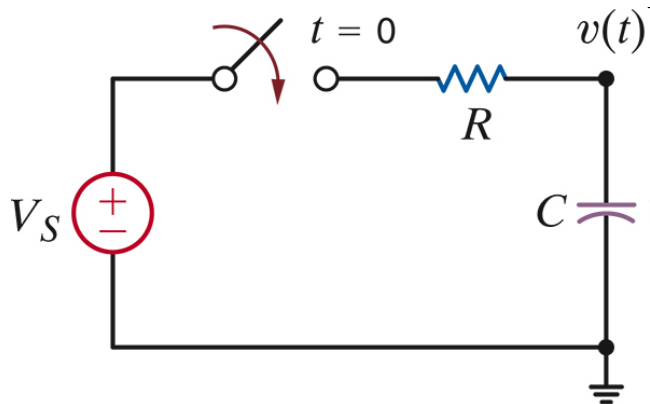
$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- $K_1$  is de “steady state solution”. De waarde die bereikt wordt als  $t \rightarrow \infty$
- $\tau$  is de tijdsconstante



Na  $5\tau$  is de eindwaarde zo goed als bereikt ( $e^{-5} = 0.007$ )

Verval is 63.2% per tijdsconstante  $\tau$



- Knooppuntsanalyse

$$i_C + i_R = 0$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C - v_S(t)}{R} = 0$$

- Algemene oplossing invullen

$$-\frac{K_2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K_1}{RC} + \frac{K_2}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_S}{RC}$$

- Uitwerken geeft

$$K_1 = V_S$$

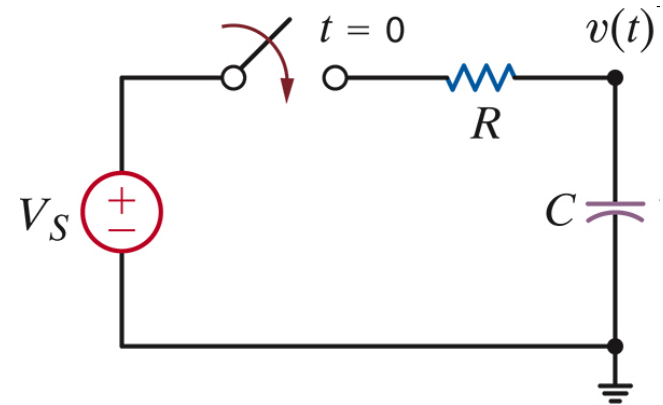
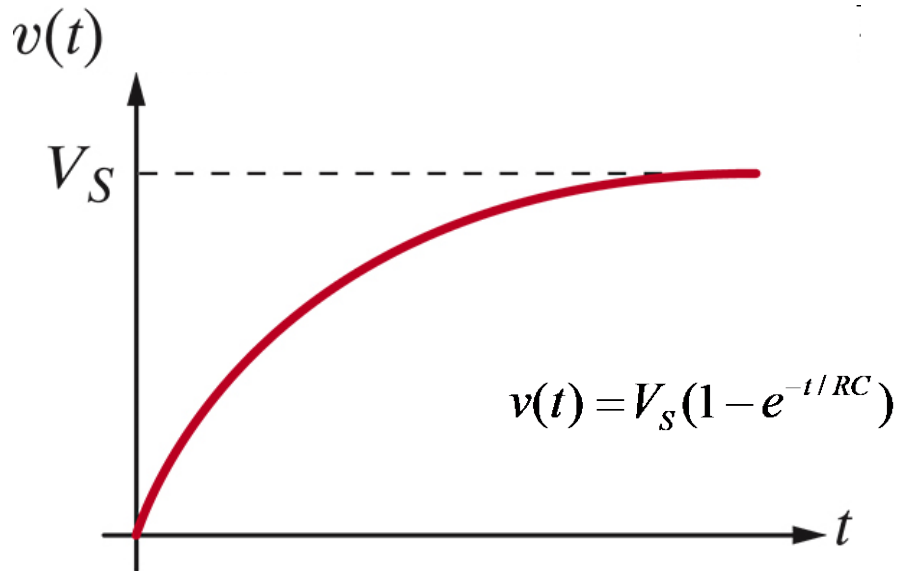
$$\tau = RC$$

- De spanning op de C is dus

$$v(t) = V_S + K_2 e^{-t/RC}$$

- Met beginwaarde  $v(t=0)=0$

$$K_2 = -V_S \quad \Rightarrow \quad v(t) = V_S - V_S e^{-t/RC}$$



Opladen van een condensator

- KVL

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_S$$

- Deze vergelijking heeft dezelfde vorm, dus ook de oplossing is van dezelfde vorm

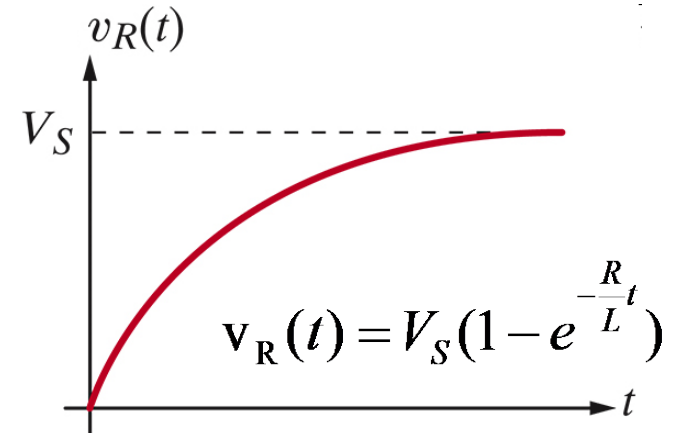
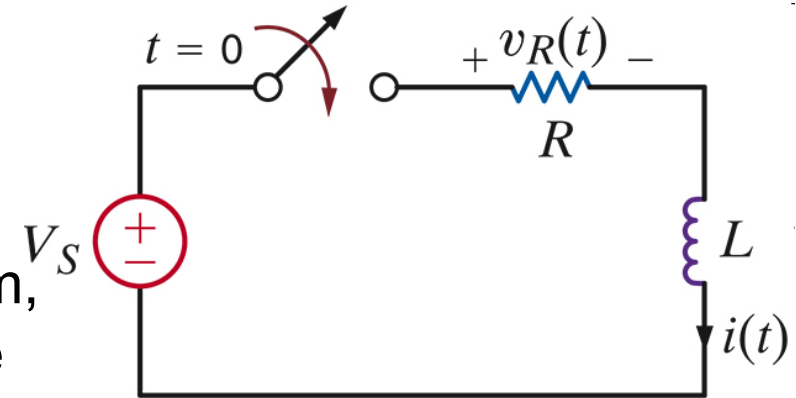
$$i(t) = \frac{V_S}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

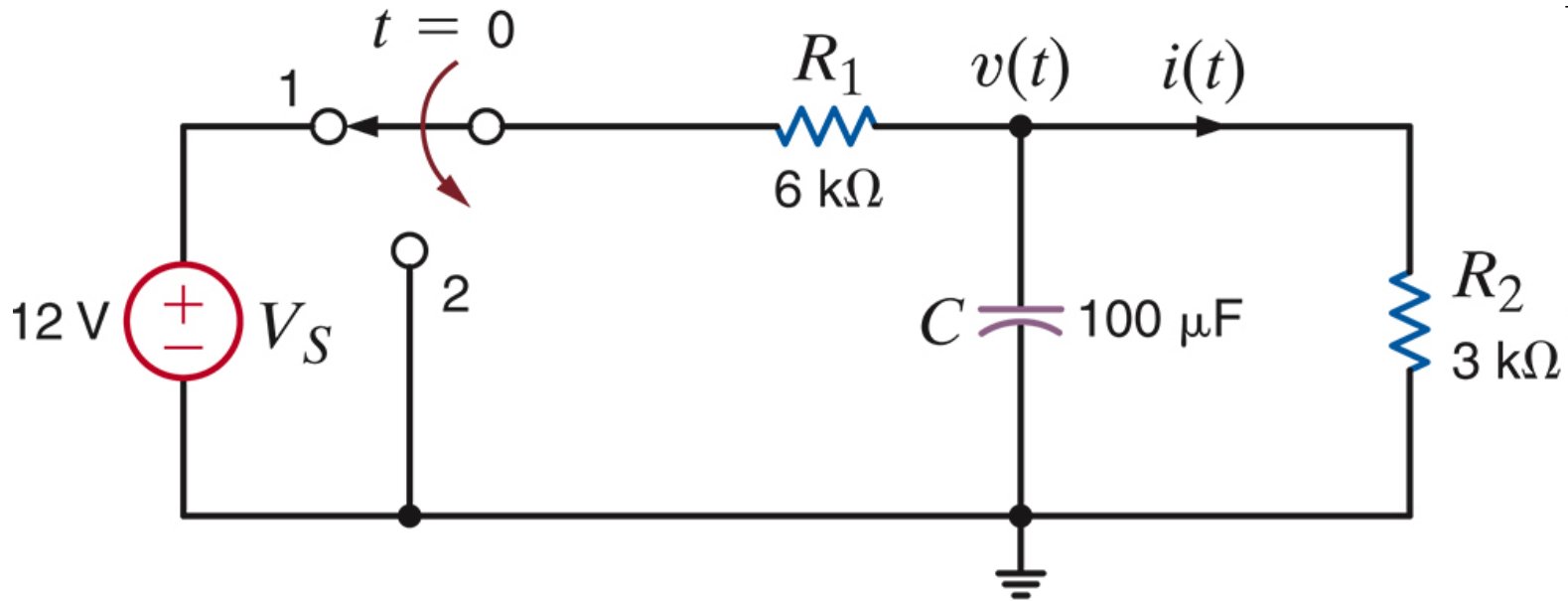
- Als de stroom nul is op  $t=0$

$$0 = \frac{V_S}{R} + K_2 \Rightarrow K_2 = -\frac{V_S}{R}$$

- Dus

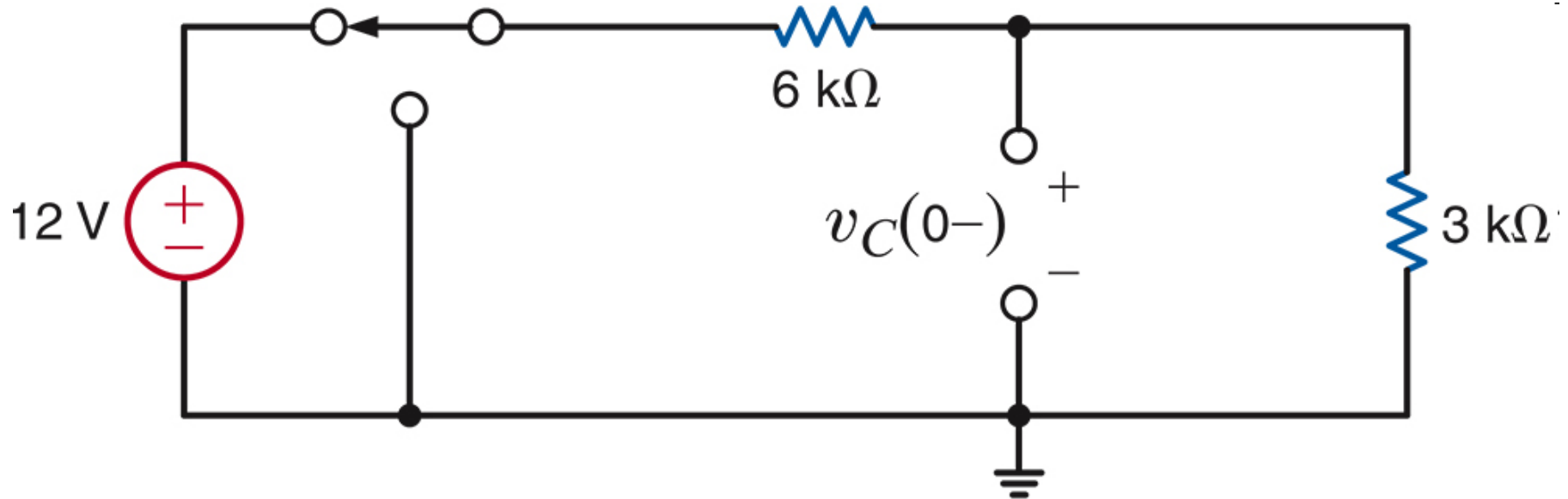
$$i(t) = \frac{V_S}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad \text{en} \quad v_R(t) = Ri(t) = V_S (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$





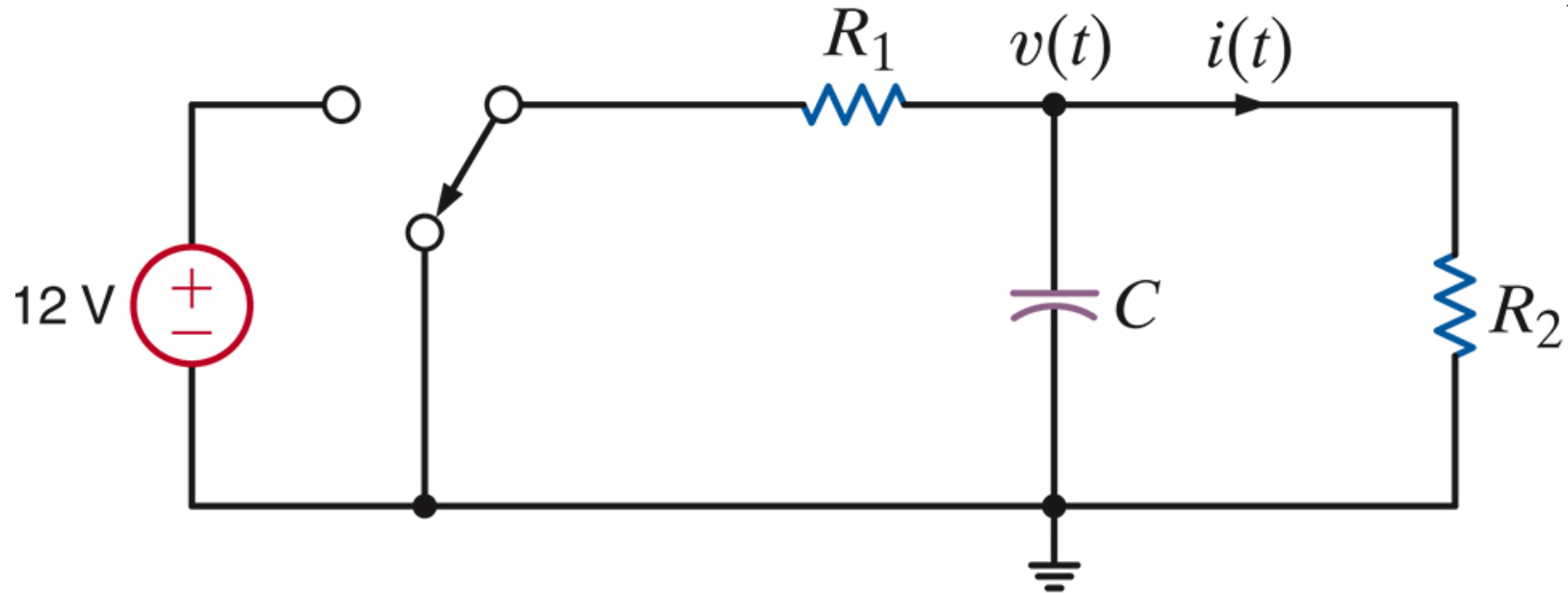
- Bereken de stroom  $i(t)$  voor  $t > 0$
- Voor  $t = 0$  ( $t = 0^-$ ) is de condensator helemaal opgeladen





- C is open keten voor DC

$$v_c(0^-) = 12 \frac{3k}{3k + 6k} = 4V$$



- KCL

$$\frac{v(t)}{R_1} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2} = 0$$

- Oplossing van deze (homogene) vergelijking

$$v(t) = K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Invullen

$$\frac{K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_1} + C \frac{d\left(K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} + \frac{K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_2} = 0$$

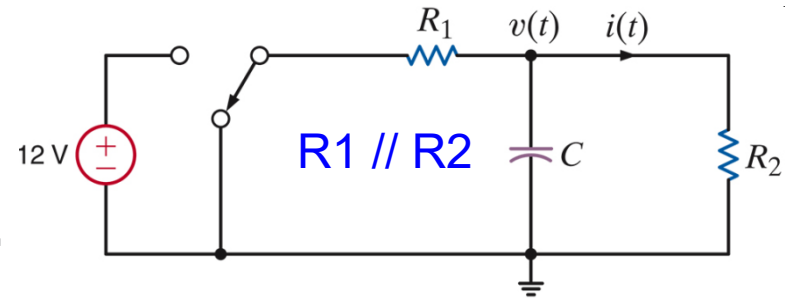
$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{C}{\tau} + \frac{1}{R_2}\right) K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

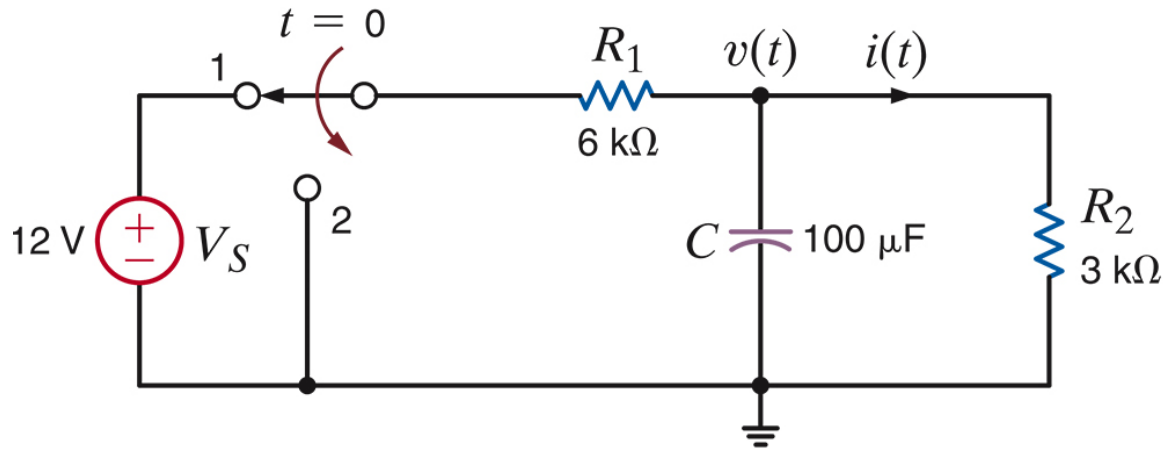
- Tijdsconstante oplossen

$$\tau = \frac{C}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = C(R_1 // R_2) = 0.2s$$

- Via beginvoorwaarde  $v_C(0)=4V$

$$v_C(0) = K_2 = 4V$$



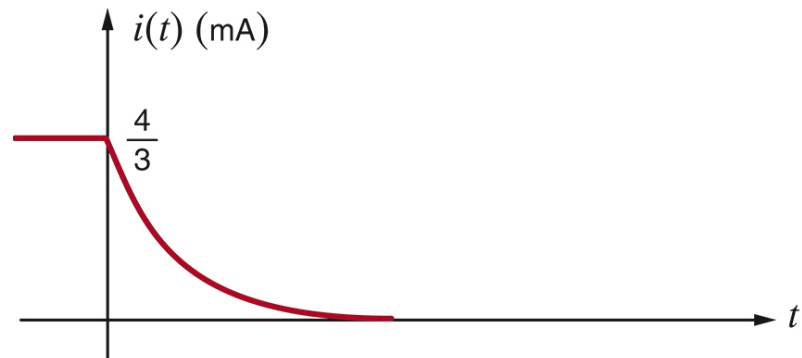


- Uit vorige

$$v(t) = 4e^{-\frac{t}{0.2}}$$

- De stroom is dan

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_2} = \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{0.2}} \text{ mA}$$



- Rekenen met de algemene oplossing die we dan invullen is omslachtig
- Kan eenvoudiger als we circuit inzicht gebruiken
  - Als circuit in evenwicht is, alle overgangsverschijnselen zijn uitgestorven, dan zijn alle  $dv/dt$  en  $di/dt$  nul.  
→ C is open keten, L is kortsluiting
  - Vlak voor het schakelen ( $t=0^-$ ) en als  $t=\infty$  is het circuit in evenwicht
  - Spanning op C, stroom door L kan niet oneindig snel veranderen  
→  $v_C(0^-)=v_C(0^+)$  en  $i_L(0^-)=i_L(0^+)$

- Algemene vorm van de oplossing

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Voor  $t \rightarrow \infty$  is het systeem in evenwicht

- $x(t \rightarrow \infty) = K_1$

- stroom door C is 0, open keten

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

- Spanning over L is 0, kortsluiting

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$K_1$  kan berekend worden door de condensatoren open te laten en de spoelen kort te sluiten

- Algemene vorm van de oplossing

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Eens  $K_1$  gekend kunnen we  $K_2$  berekenen als we  $x$  kennen op een moment in de tijd
  - We gebruiken hiervoor de beginconditie  $x(0)$
  - We moeten daarvoor de waarde van de spanning over de C of de stroom door de L kennen voor de schakelaar op  $t=0$ -omgeschakeld werd
  - Als het systeem op  $t=0$ - in evenwicht was kunnen we de condensatoren weer weglaten en de spoelen kortsluiten ...

- Algemene vorm van de oplossing

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Tijdsconstante  $\tau$  wordt berekend door de equivalente Thevenin weerstand te berekenen aan de klemmen van de L of C:  $\tau = R_{Th} C$  of  $\tau = L/R_{Th}$

- Samengevat

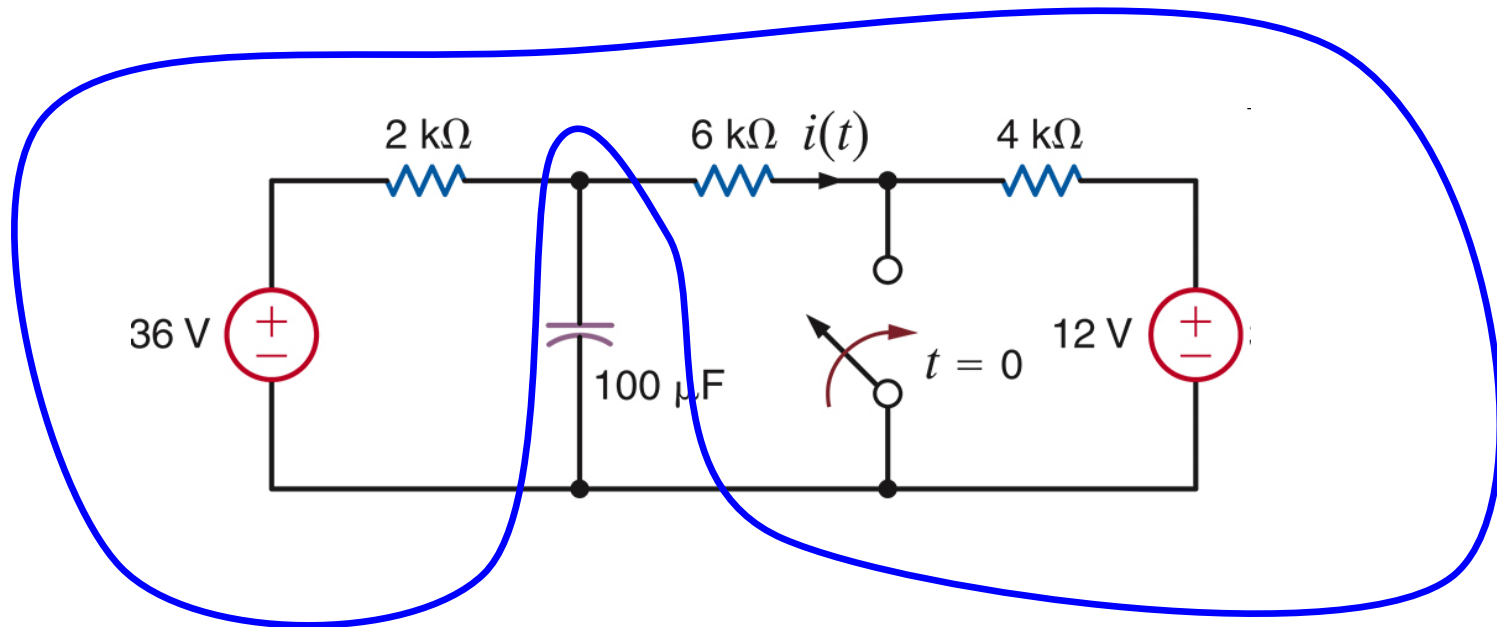
- $x(\infty) = K_1$
- $x(0) = K_1 + K_2$
- $\tau = R_{Th} C$  of  $\tau = L/R_{Th}$

(Volgorde van de stappen doet er niet toe)



# Wat komt Thevenin hier doen? (I)

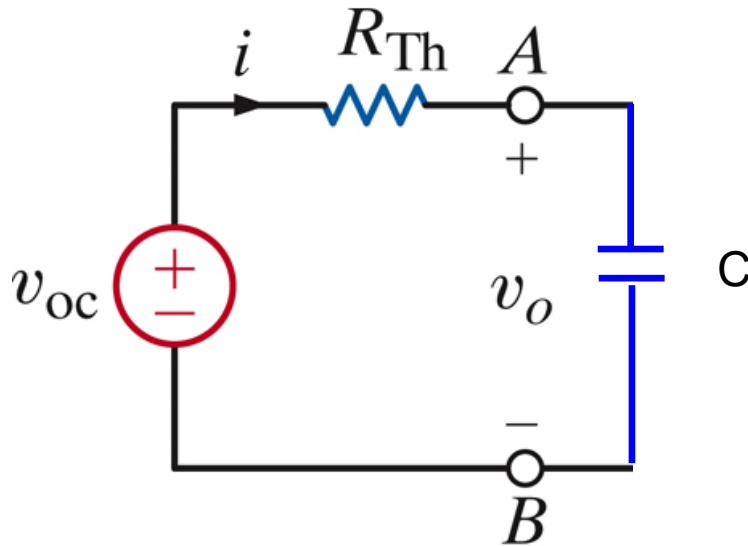
- Neem dit lineair circuit bijvoorbeeld



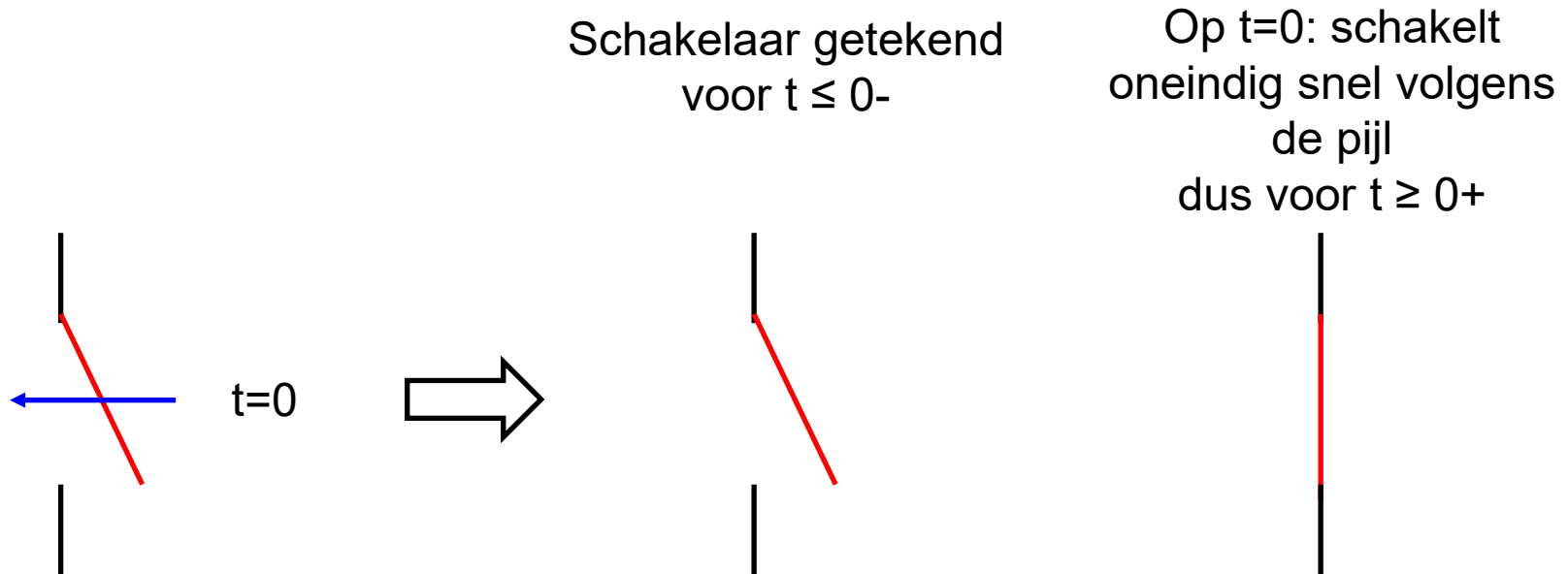
Dit vervangen we door het Thevenin equivalent!

# Wat komt Thevenin hier doen? (II)

- Dit geeft ...



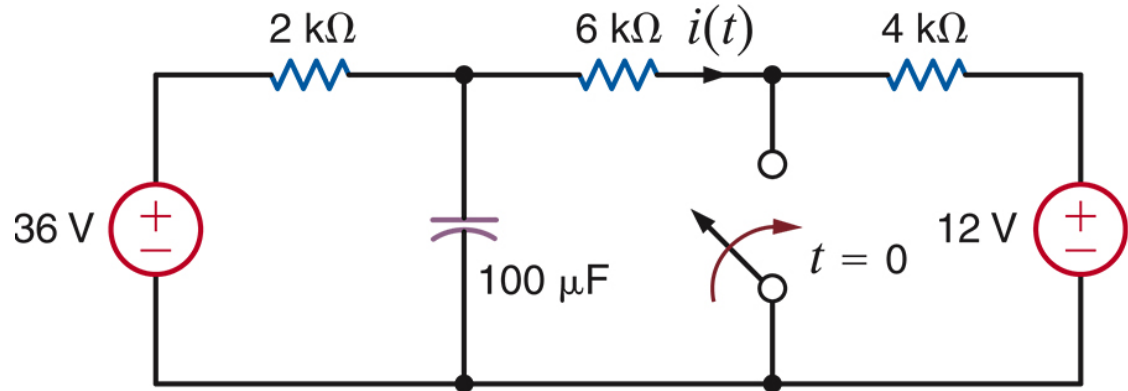
- Dit netwerk heeft een tijdsconstante  $R_{Th}C$
- Dit netwerk is equivalent met het origineel!
- We hebben dus ook de tijdsconstante van het originele netwerk gevonden!



$i(t)$ ,  $t > 0$  ?

- Stap 1

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



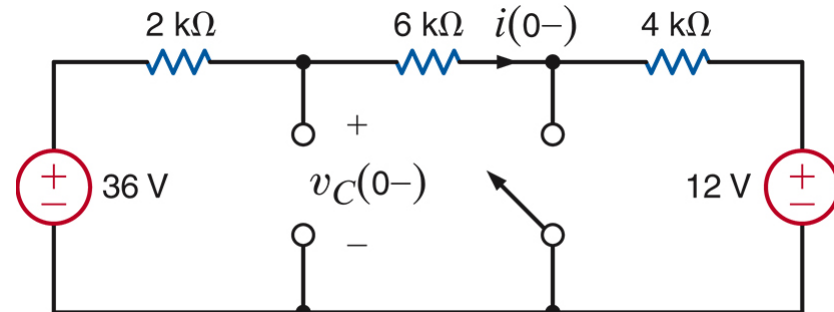
- Stap 2, circuit in evenwicht op  $t = 0^- \rightarrow v_c(0^-)$

Via superpositie

$$v_c(0^-) = 36 \frac{6 + 4}{6 + 4 + 2} + 12 \frac{2}{6 + 4 + 2} = 32V$$

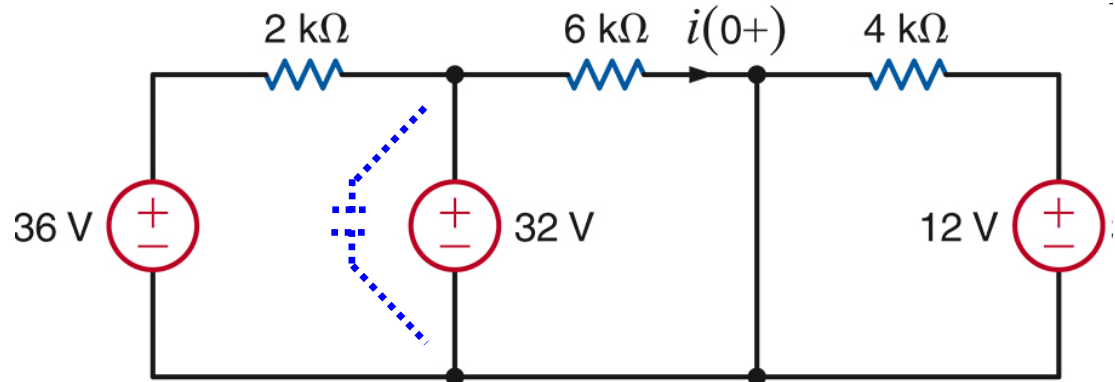
Via stroom

$$v_c(0^-) = 36 - \left( \frac{36 - 12}{2k + 4k + 6k} \right) 2k = 36 - 2 \cdot 2 = 32V$$



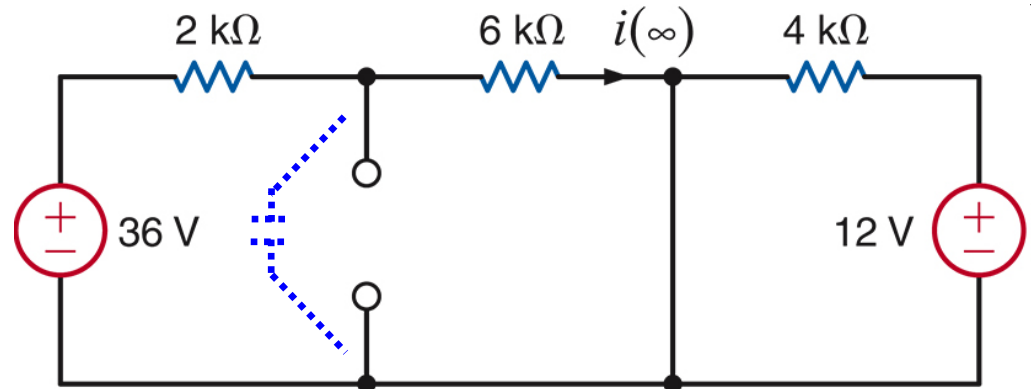
- Stap 3: C vervangen door bron  $\rightarrow i(0+)$

$$i(0+) = \frac{32}{6k} = \frac{16}{3} \text{ mA}$$



- Stap 4: circuit in evenwicht op  $t = \infty \rightarrow i(\infty)$

$$i(\infty) = \frac{36}{2k + 6k} = \frac{9}{2} \text{ mA}$$



- Stap 5: Thevenin weerstand voor de tijdsconstante

$$R_{Th} = \frac{2k \cdot 6k}{2k + 6k} = \frac{3}{2} k\Omega$$

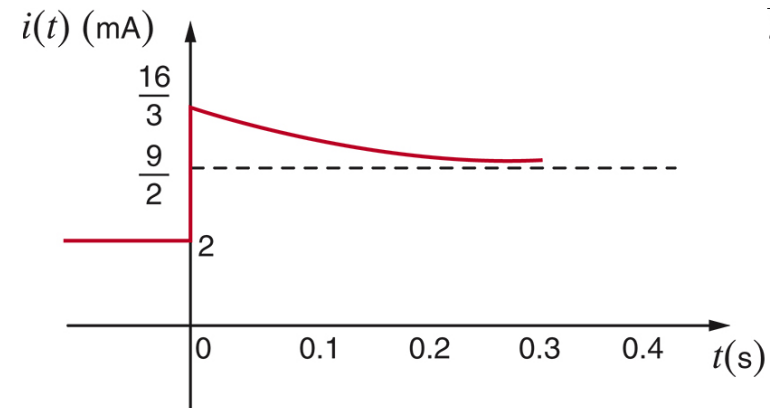
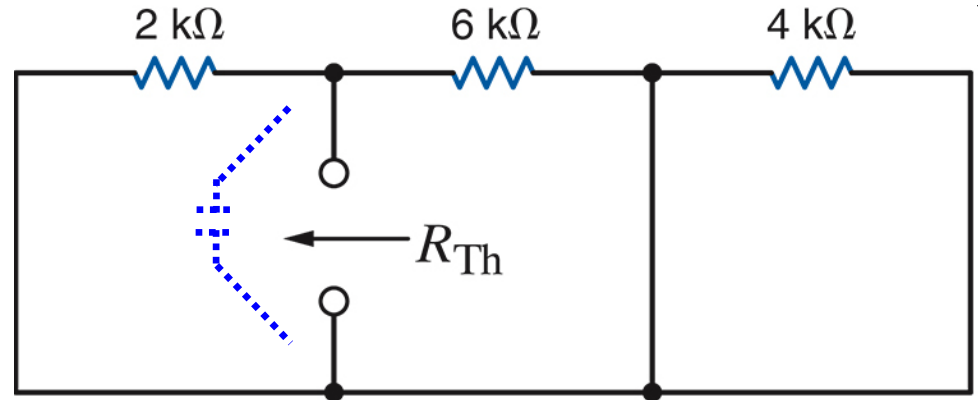
- Stap 6: alles samen

$$K_1 = i(\infty) = \frac{9}{2} mA$$

$$K_2 = i(0+) - i(\infty) = \frac{16}{3} - \frac{9}{2} = \frac{5}{6} mA$$

$$\tau = R_{Th} C = \frac{3}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0.15s$$

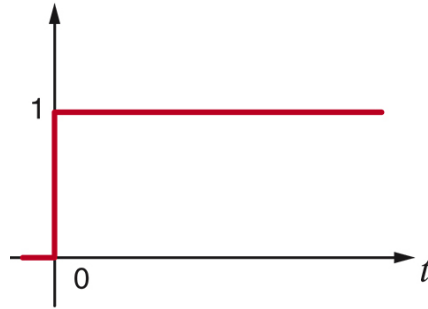
$$\Rightarrow i(t) = \frac{9}{2} + \frac{5}{6} e^{-\frac{t}{0.15}}$$



- Wat doet het circuit als we een puls aanleggen?
- Hoe puls beschrijven

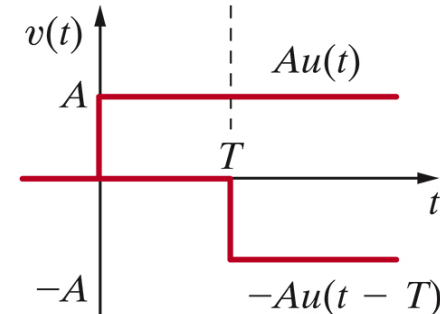
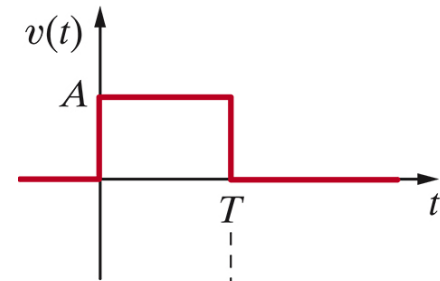
- Eenheidsstap

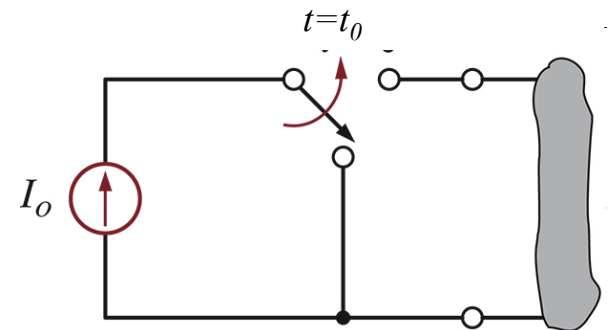
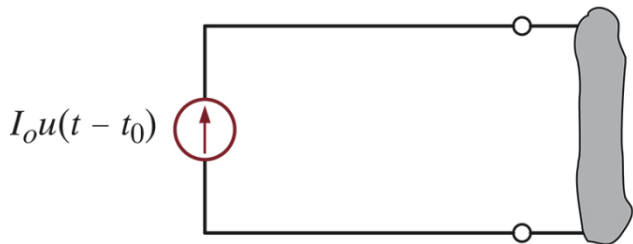
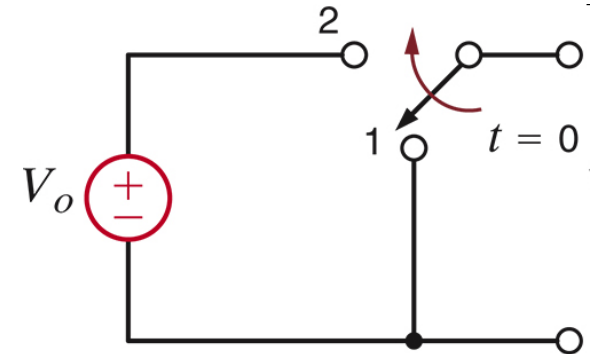
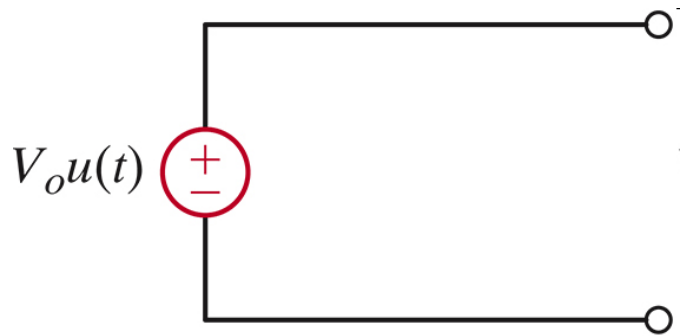
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



- puls

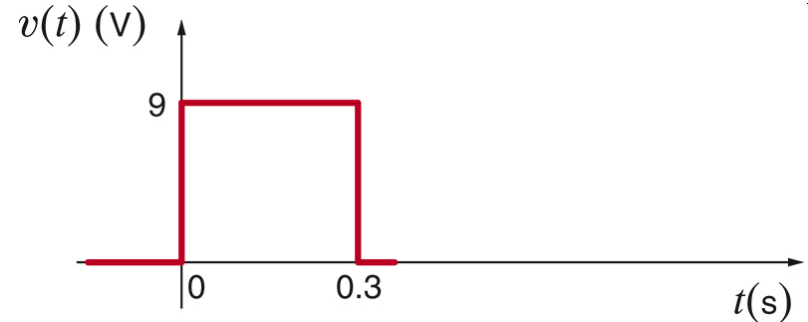
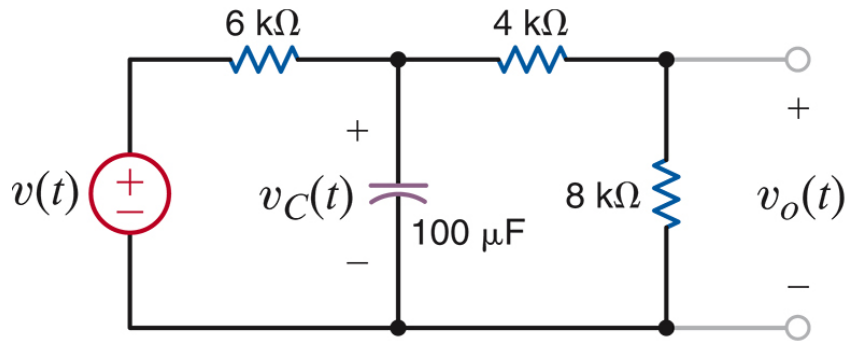
$$v(t) = A[u(t - t_0) - u(t - t_0 - T)]$$





We kunnen dus gevolgen van een  
Stroom of spanningspuls berekenen!

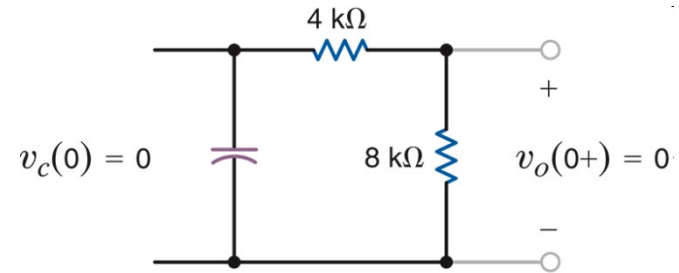




**$v_o(t)$  ?**

- **Beginvoorwaarde**

$$v(t) = 0 \text{ voor } t < 0 \Rightarrow v_C(0) = 0$$

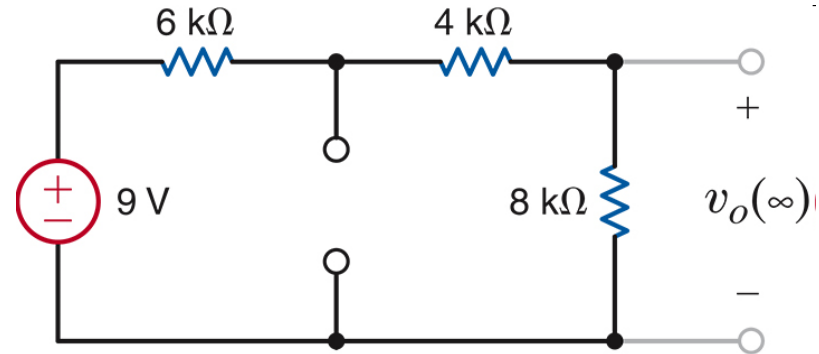


- **Stel dat er na  $t=0$ , niet meer geschakeld wordt...**

- We kunnen circuit oplossen alsof de bron plots ingeschakeld wordt

- $v_o(\infty)$  ?

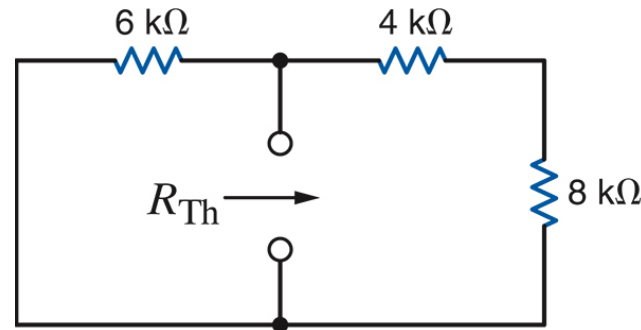
$$v_o(\infty) = \frac{8}{8+4+6} 9 = 4V$$



- $K_1=4, K_1+K_2=0 \rightarrow K_2=-4$

- $R_{Th}$  ?

$$R_{Th} = \frac{6k \cdot (8k + 4k)}{6k + (8k + 4k)} = 4k$$



- $\tau = R_{Th} C = (4 \cdot 10^3)(100 \cdot 10^{-6}) = 0.4s$

- Zolang er niet geschakeld wordt geldt dus

$$v_o(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{0.4}} \quad 0 < t < 0.3s$$

- Wat gebeurt er na het schakelen ?

- Spanning op de condensator is continu !

$$v_c(0.3-) = v_c(0.3+)$$

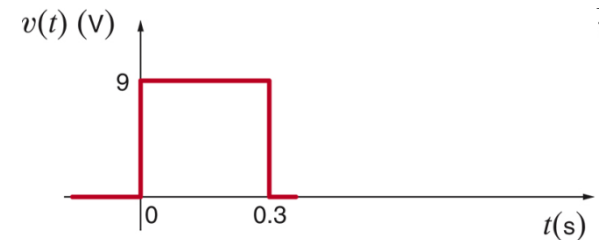
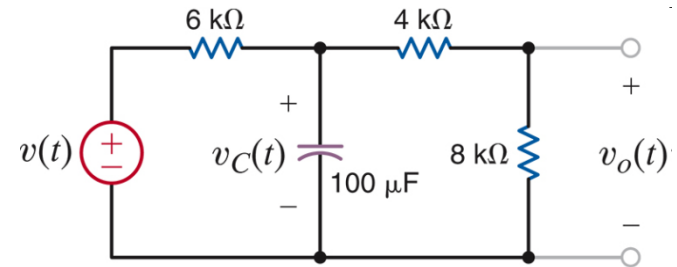
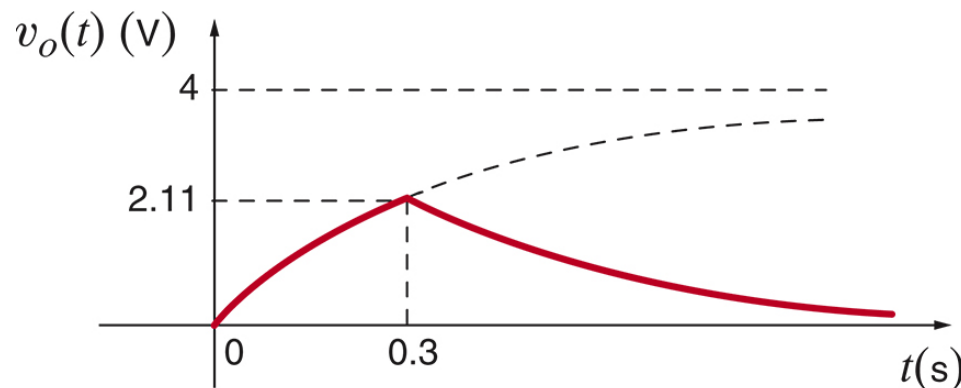
- Na 0.3 s verandert er niets meer dus ook de spanning  $v_o$  blijft continu
- De condensator wordt exponentieel ontladen met tijdsconstante bepaald door C en de Thevenin weerstand
- Dit geeft zelfde tijdsconstante aan de uitgang

$$v_o(0.3) = 4 - 4e^{-\frac{0.3}{0.4}} = 2.11V$$

■ dus

$$v_o(t) = 2.11 \cdot e^{-\frac{t-0.3}{0.4}} \quad t > 0.3s$$

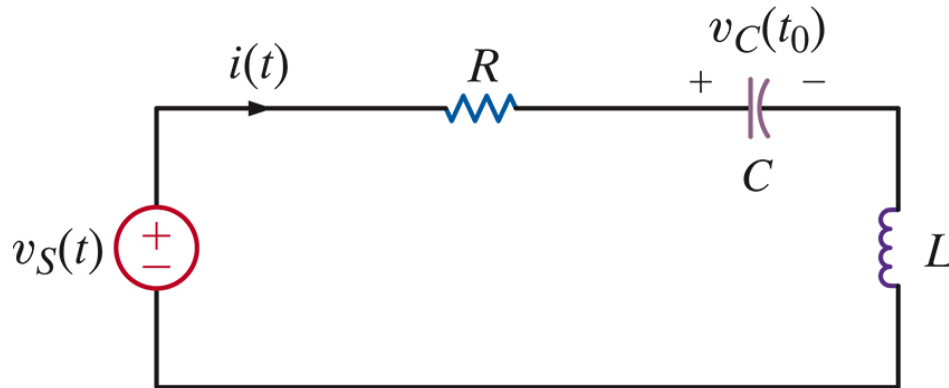
■ Volledige oplossing



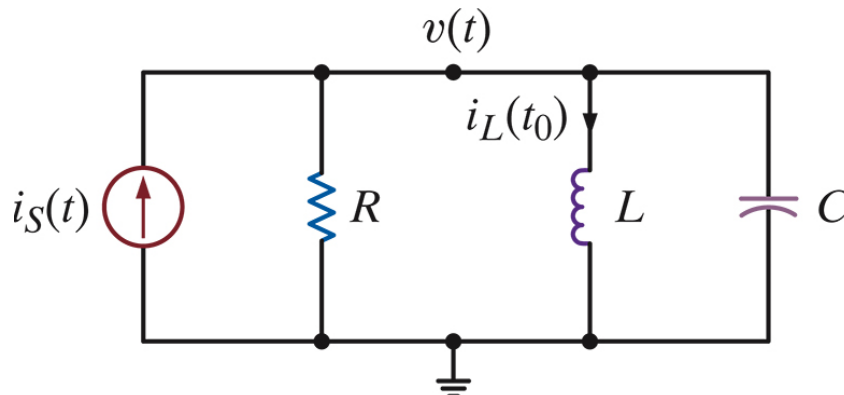
$$v_o(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0V & t < 0 \\ 4(1 - e^{-\frac{t}{0.4}})V & 0 < t < 0.3s \\ 2.11 \cdot e^{-\frac{t-0.3}{0.4}}V & 0.3s < t \end{array} \right.$$

- Met een spoel EN een condensator

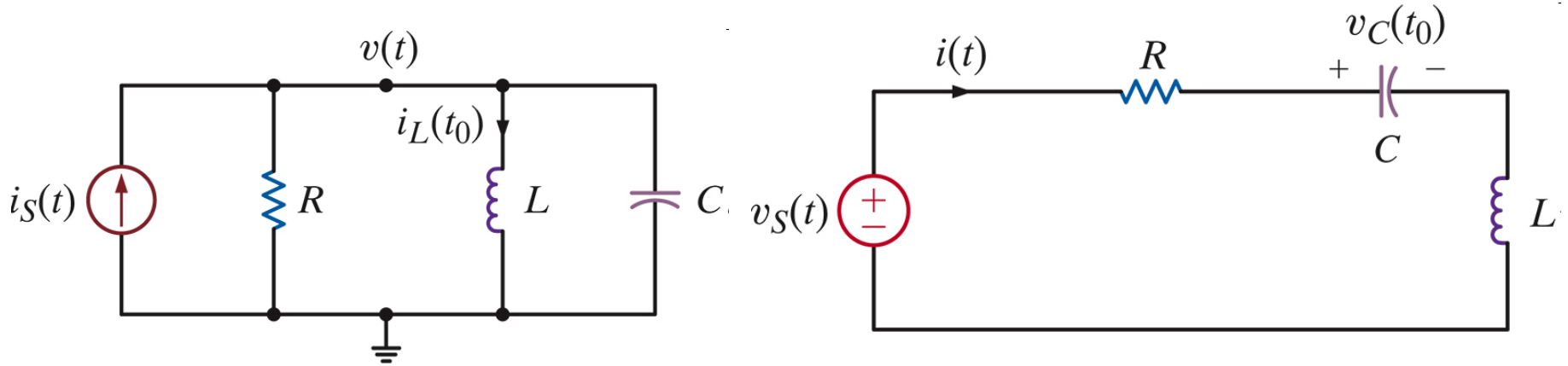
- In serie



- In parallel



# Tweede orde circuits - vergelijkingen



## ■ KCL

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int v(x) dx + i_L(t_0) + C \frac{dv(t)}{dt} = i_s(t)$$

$$C \frac{d^2 v(t)}{dt} + \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{L} = \frac{di_s(t)}{dt}$$

## ■ KVL

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(x) dx + v_C(t_0) + L \frac{di(t)}{dt} = v_s(t)$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \frac{dv_s(t)}{dt}$$

afleiden

Differentiaal  
vergelijking



- Vorm van de vergelijking

$$\frac{d^2x(t)}{dt} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

- We veronderstellen  $f(t)$  voorlopig constant
- $\zeta$  is de dempingsfactor of damping
- $\omega_0$  is de (ongedempte) natuurlijke frequentie
- betekenis van de coëfficiënten wordt duidelijk als we de vergelijking oplossen

- Karakteristieke veelterm

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

- Met als oplossing

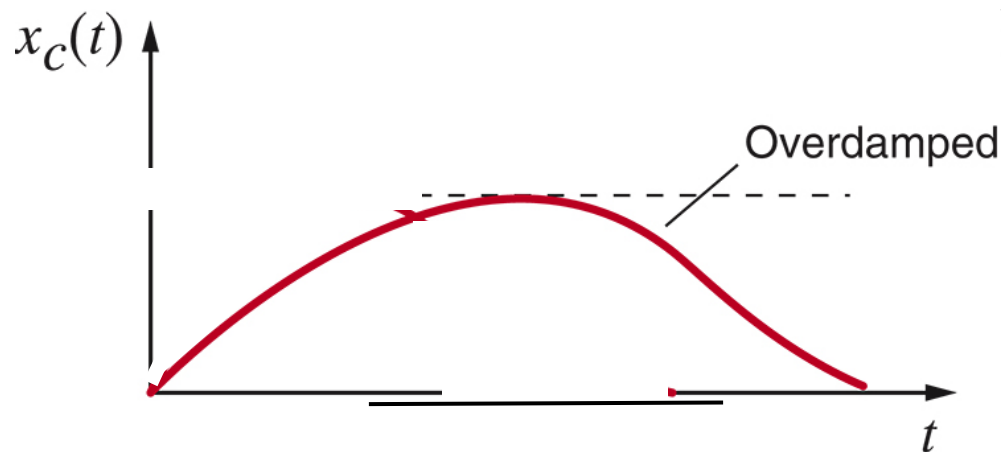
$$s = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Oplossing verschilt naargelang  
aantal en soort nulpunten

- $\zeta > 1$ , twee reële nulpunten, overgedempt
- Oplossing van de homogene vergelijking:

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

Nulpunten van de karakteristieke veelterm



$K_1, K_2$  uit beginvoorwaarden ...

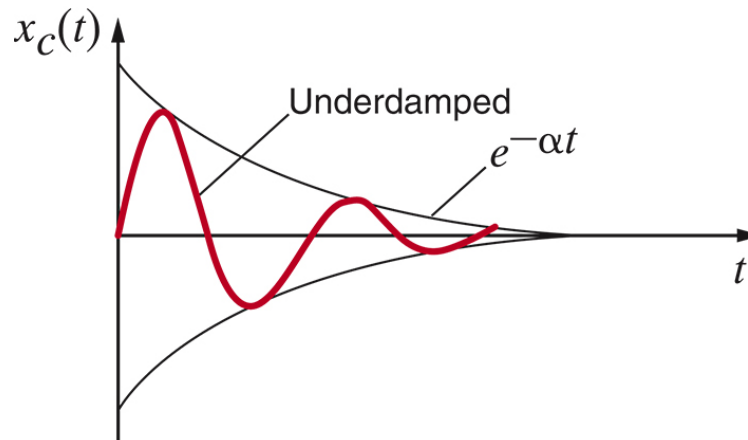


- $\zeta < 1$ , twee complexe nulpunten, ondergedempt
- Oplossing van de homogene vergelijking:

$$x_c(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left( A_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + A_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right)$$

Complexen nulpunten geeft sin/cos oplossing

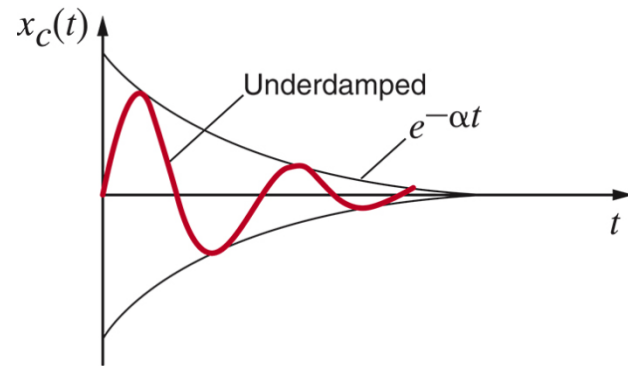
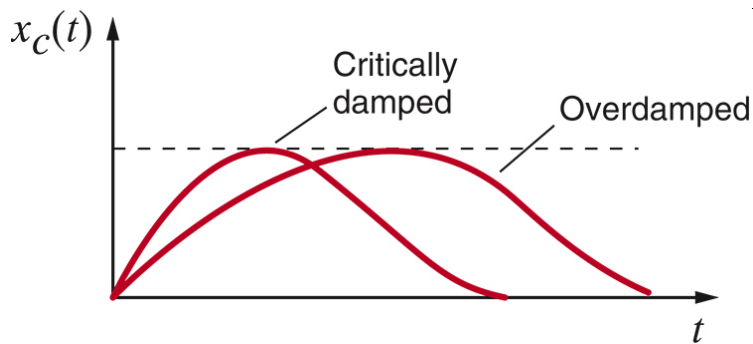
$$e^{(a+jb)t} = e^{at} (\cos(bt) + j \sin(bt))$$



$A_1, A_2$  uit beginvoorwaarden ...

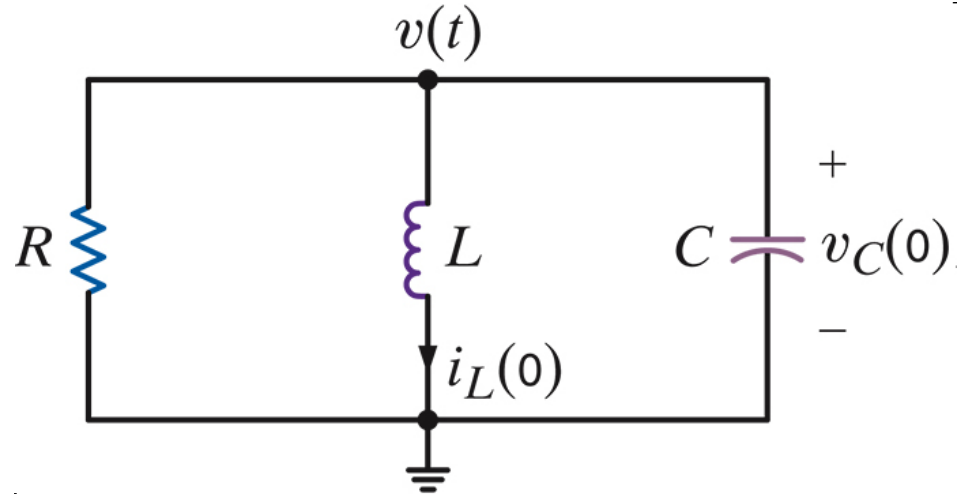
- $\zeta = 1$ , twee reële samenvallende nulpunten, kritisch gedempt
- Oplossing van de homogene vergelijking

$$x_c(t) = B_1 e^{-\zeta\omega_0 t} + B_2 t e^{-\zeta\omega_0 t}$$



$B_1, B_2$  uit beginvoorwaarden ...

- Wat zijn  $v(t)$  en  $i_L(t)$  als  $i_L(0) = -1\text{A}$  en  $v_C(0) = 4\text{V}$  ?
- $R = 2\Omega$ ,  $C = 0.2\text{F}$ ,  $L = 5\text{H}$



- Stroom door de spoel

$$v(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(u) du + i_L(0)$$

- Knooppuntsanalyse

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(u) du + i_L(0) + C \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

- Vergelijking afleiden

$$\frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} v(t) + C \frac{d^2v(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = 0$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = 0$$

$$R=2\Omega, C=0.2F, L=5H$$

- Karakteristieke vergelijking

$$s^2 + 2.5s + 1 = 0$$

$$s_1 = -2 \quad s_2 = -0.5$$

} 2 reële wortels → overgedempt

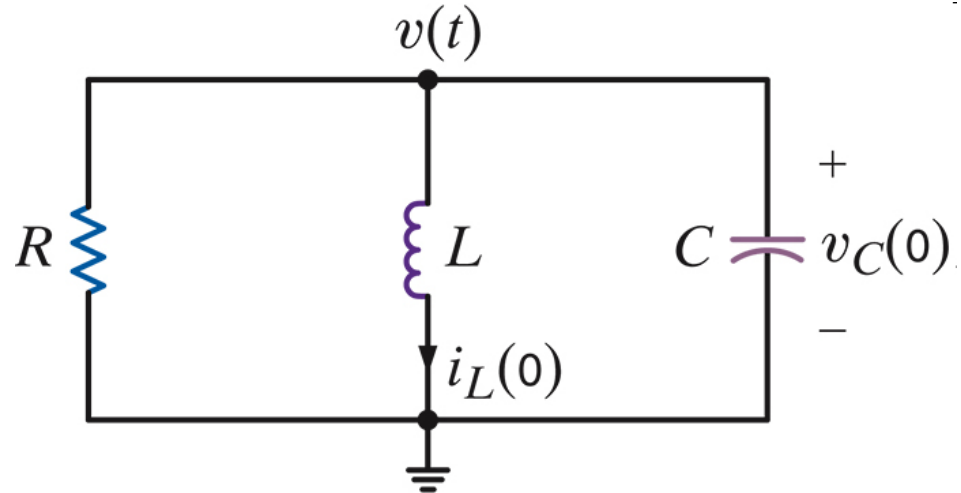
- Oplossing van de vorm

$$v(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-0.5t}$$

- $K_1, K_2$  via beginvoorwaarden

$$v(0) = v_C(0) = 4 = K_1 + K_2$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2K_1 - 0.5K_2 = ??? \rightarrow \text{niet gegeven, wel } i_L(0), dv(0)/dt \sim i \text{ door } C$$



- Via KCL weten we

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + i_L(t) = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{1}{C} i_L(0) = -5$$

wel gekend!

- Dus

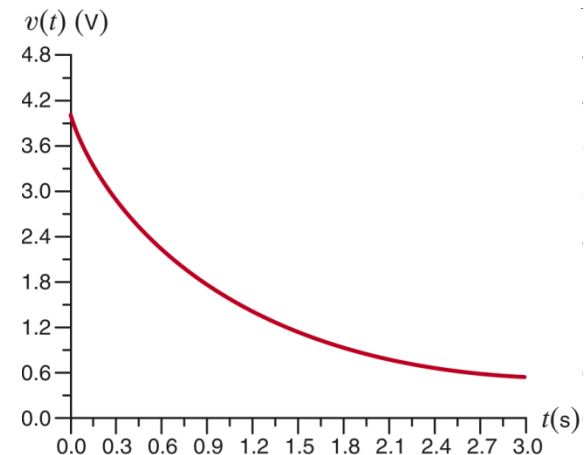
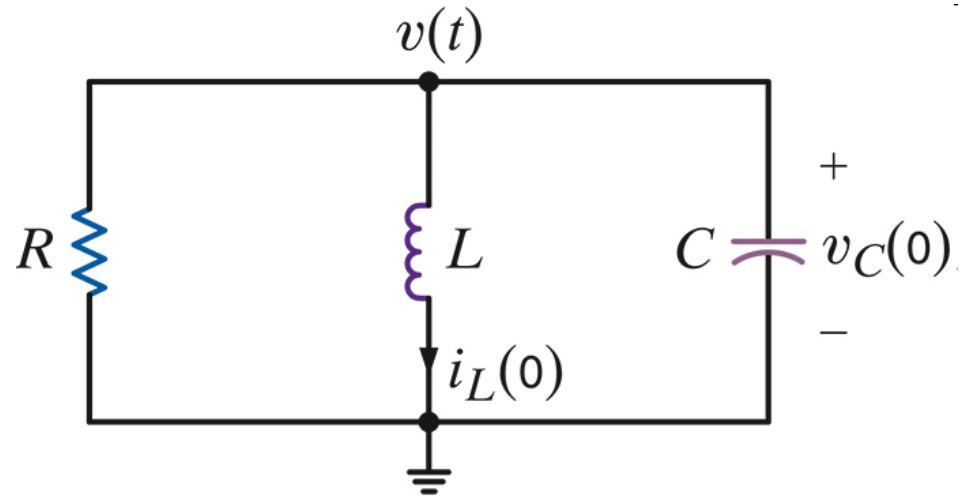
$$v(0) = v_C(0) = 4 = K_1 + K_2$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2K_1 - 0.5K_2 = -5$$

$$K_1=2, K_2=2$$

- Oplossing voor  $v(t)$

$$v(t) = 2e^{-2t} + 2e^{-0.5t} \text{ V}$$

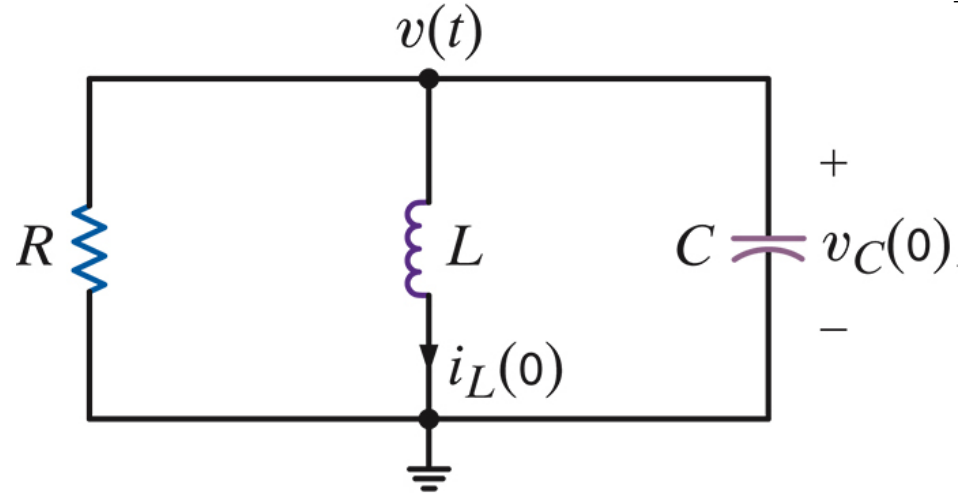


- De stroom  $i_L$ ?

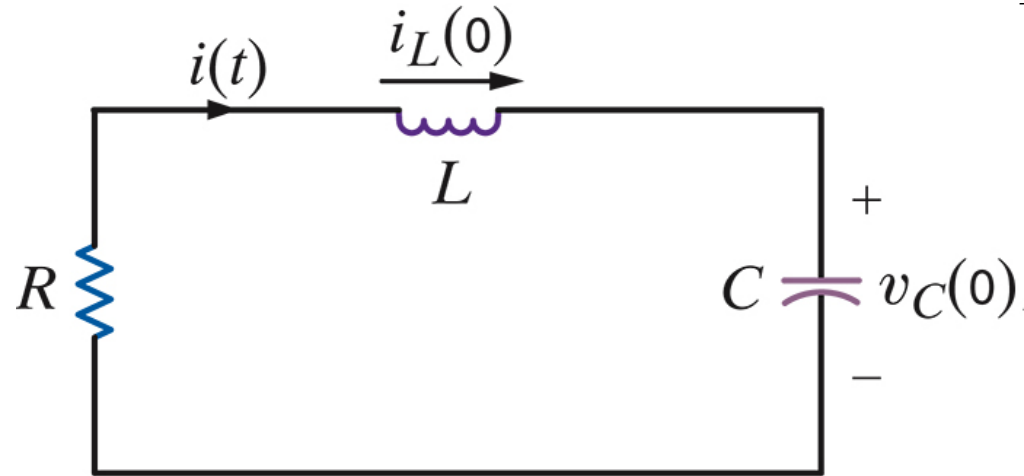
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

$$i_L(t) = \frac{1}{5} \int (2e^{-2t} + 2e^{-0.5t}) dt$$

$$i_L(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-0.5t} A$$



- Wat zijn  $v_C(t)$  en  $i_L(t)$  als  $i_L(0)=4A$  en  $v_C(0)=-4V$  ?
- $R=6\Omega$ ,  $C= 0.04F$ ,  $L= 1H$



- Differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = 0$$

- Karakteristieke vergelijking

$$s^2 + 6s + 25 = 0$$

$$s_1 = -3 + j4 \quad s_2 = -3 - j4$$

2 complex toegevoegde wortels  
 $\rightarrow$  ondergedempt

- Oplossing van de vorm

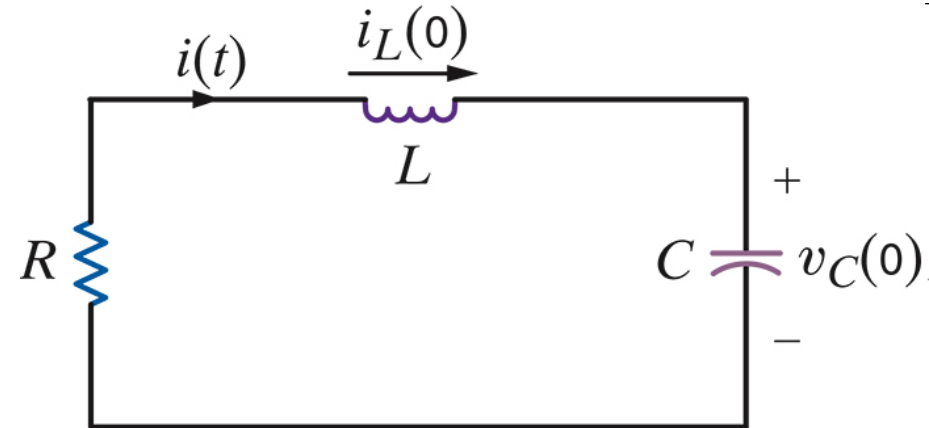
$$i(t) = K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sin 4t$$

- Beginvoorwaarden

$$i(0) = K_1 = 4$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -4K_1 e^{-3t} \sin 4t - 3K_1 e^{-3t} \cos 4t + -4K_2 e^{-3t} \cos 4t - 3K_2 e^{-3t} \sin 4t$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -3K_1 + 4K_2 = \text{????}$$



- KVL

$$Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + v_C(0) = 0 \Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = -20$$

$$K_1 = 4, K_2 = -2$$

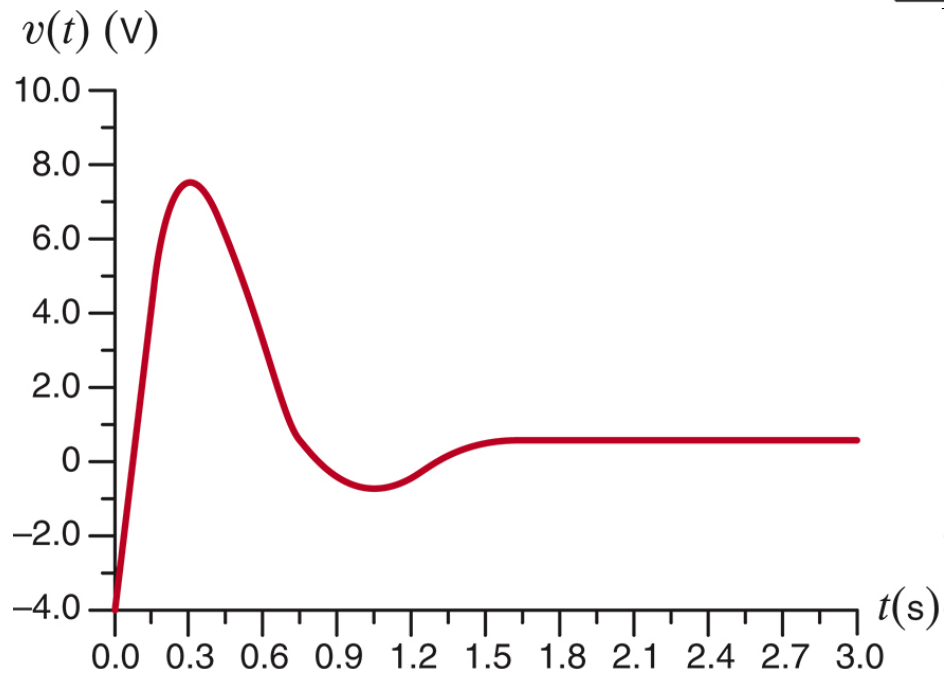
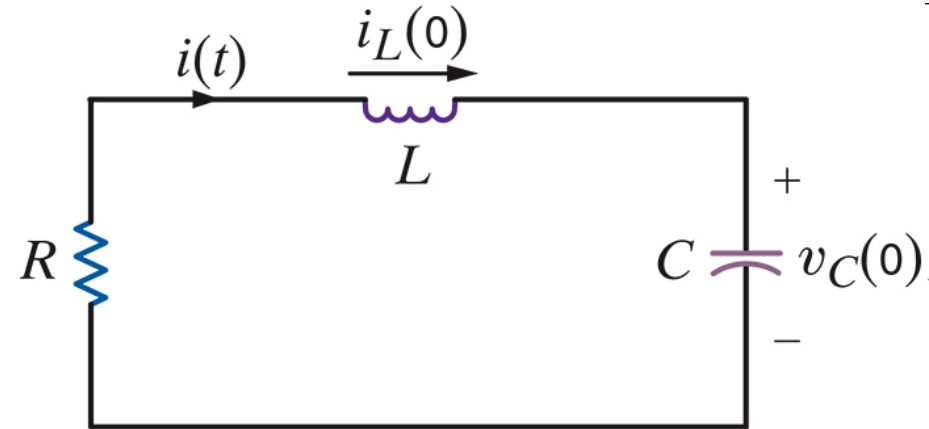
$$i(t) = 4e^{-3t} \cos 4t - 2e^{-3t} \sin 4t \text{ A}$$



- De spanning  $v_C(t)$  via KVL

$$v_c(t) = -Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

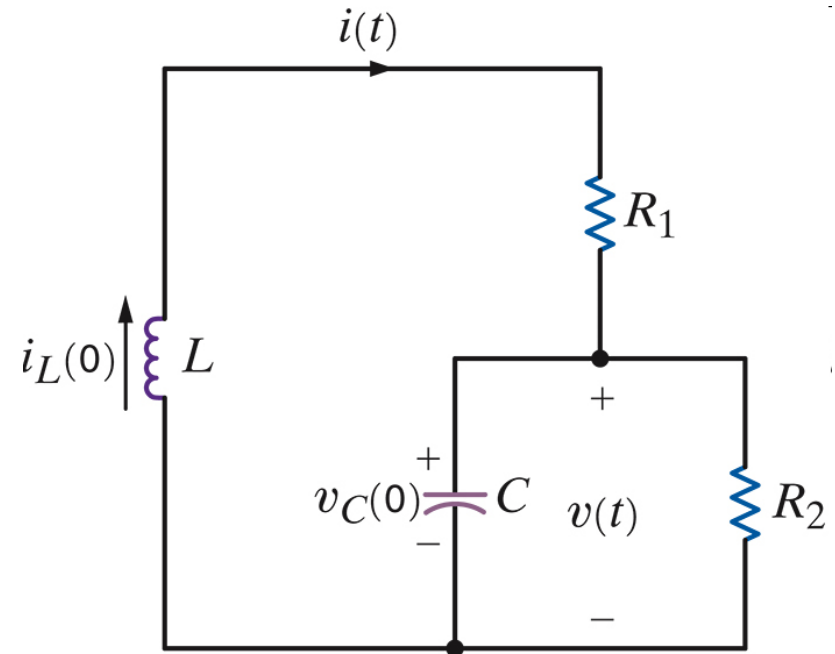
$$v(t) = -4e^{-3t} \cos 4t + 22e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$



- Iets gecompliceerder netwerk
- $R_1=10 \Omega$ ,  $R_2=8 \Omega$   
 $C=0.125 \text{ F}$ ,  $L=2 \text{ H}$
- $v_C(0)=1 \text{ V}$ ,  $i_L(0)=0.5 \text{ A}$
- Differentiaalvergelijkingen

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v(t) = 0 \quad (\text{KVL})$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2} \quad (\text{KCL})$$



- Differentiaalvergelijking in elkaar steken

$$\frac{d^2 v(t)}{dt} + \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} v(t) = 0$$

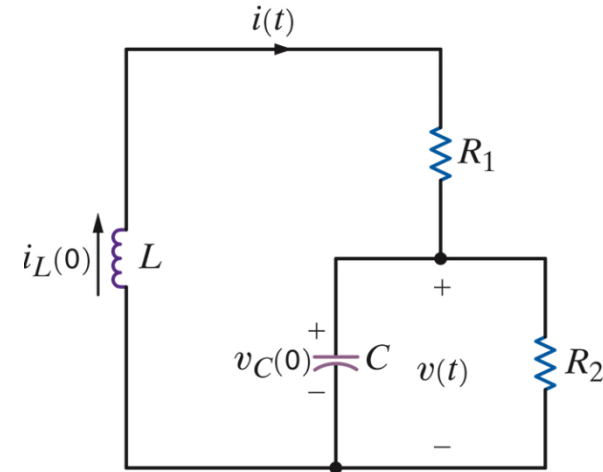
$$\frac{d^2 v(t)}{dt} + 6 \frac{dv(t)}{dt} + 9 \cdot v(t) = 0$$

- Karakteristieke vergelijking

$$s^2 + 6s + 9 = 0 \Rightarrow s_1 = -3, s_2 = -3, \text{ kritisch gedempt}$$

- Oplossing van de vorm

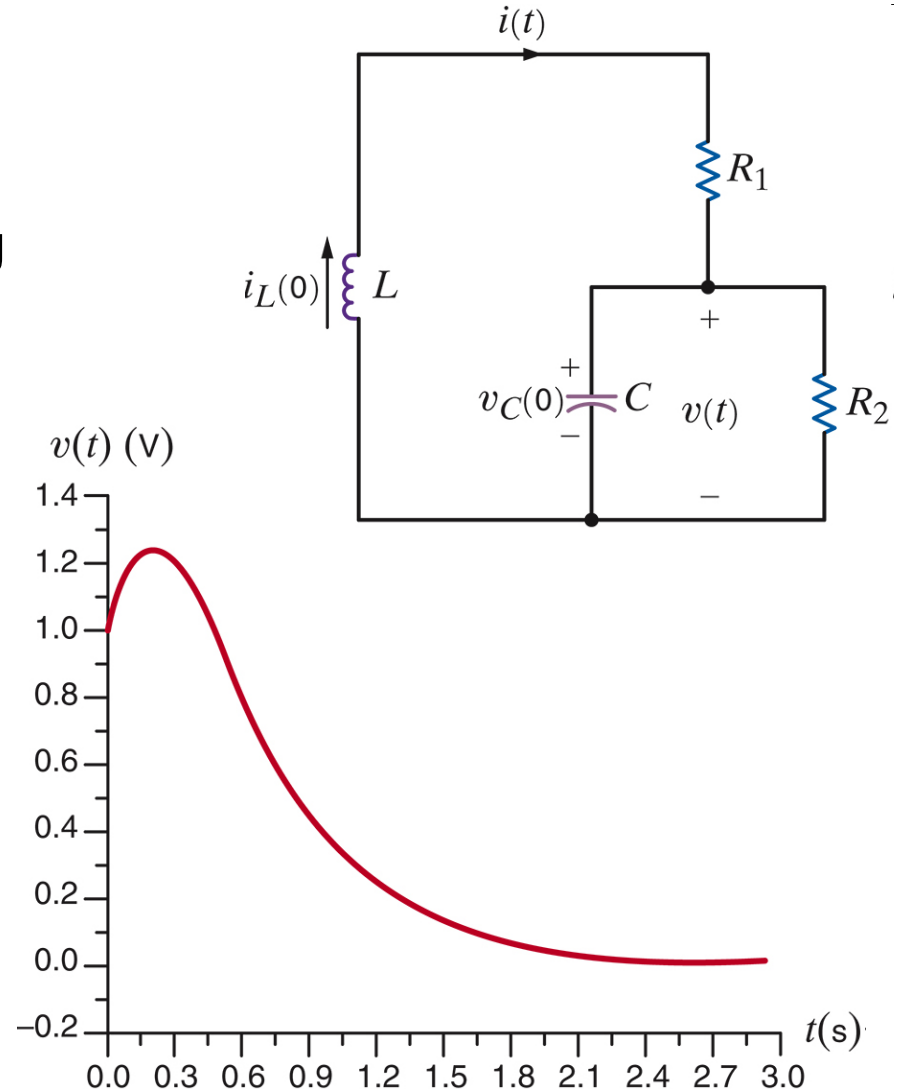
$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 \cdot t \cdot e^{-3t}$$



- Via
  - gekende  $i_L(0)$  en  $v_C(0)$
  - Oorspronkelijke diff. vergelijking
  - KCL
- Oplossing

$$v(t) = e^{-3t} + 6 \cdot t \cdot e^{-3t} \text{ V}$$

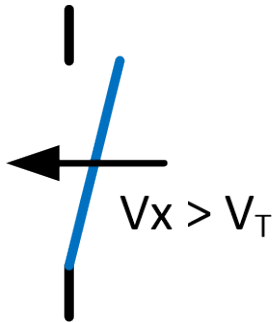
$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{3}{2} \cdot t \cdot e^{-3t} \text{ A}$$



- 7.1 introduction
  - Lectuur
- 7.2 first-order circuits
  - Gezien
- 7.3 second-order circuits
  - Gezien
- 7.4 transient PSPICE analysis ...
  - Niet gezien
- 7.5 application examples
  - Voorbeelden
- 7.6 design examples
  - Voorbeelden

- Opgelet: de rest van dit hoofdstuk staat niet in het boek
  
- Motivatie:
  - een korte opstap naar digitale electronica
  - Vertrekken van uit elektrische netwerken

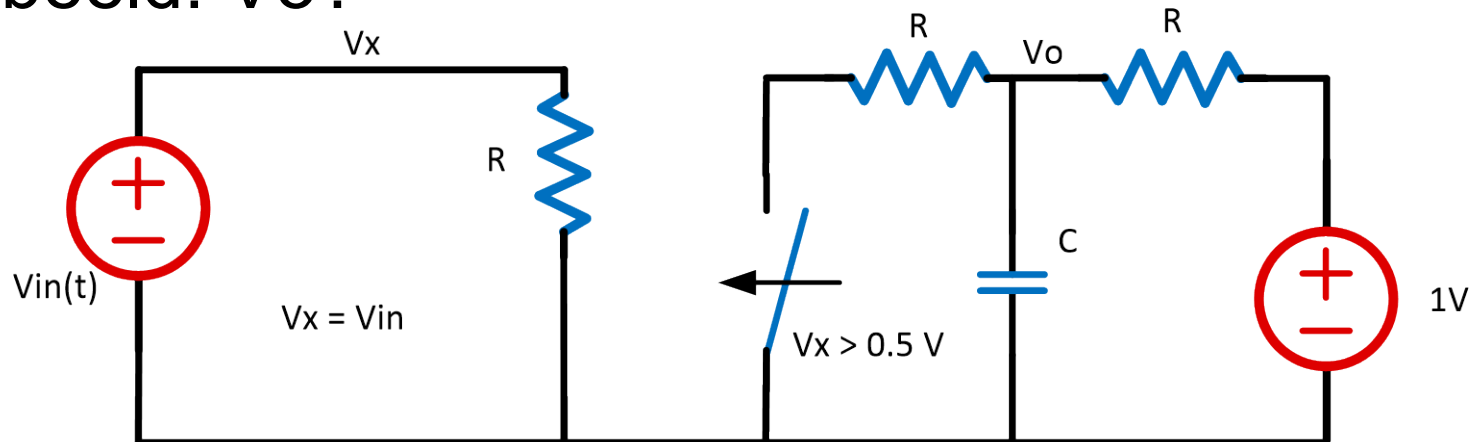
# Voltage Controlled switch spanningsgestuurde schakelaar



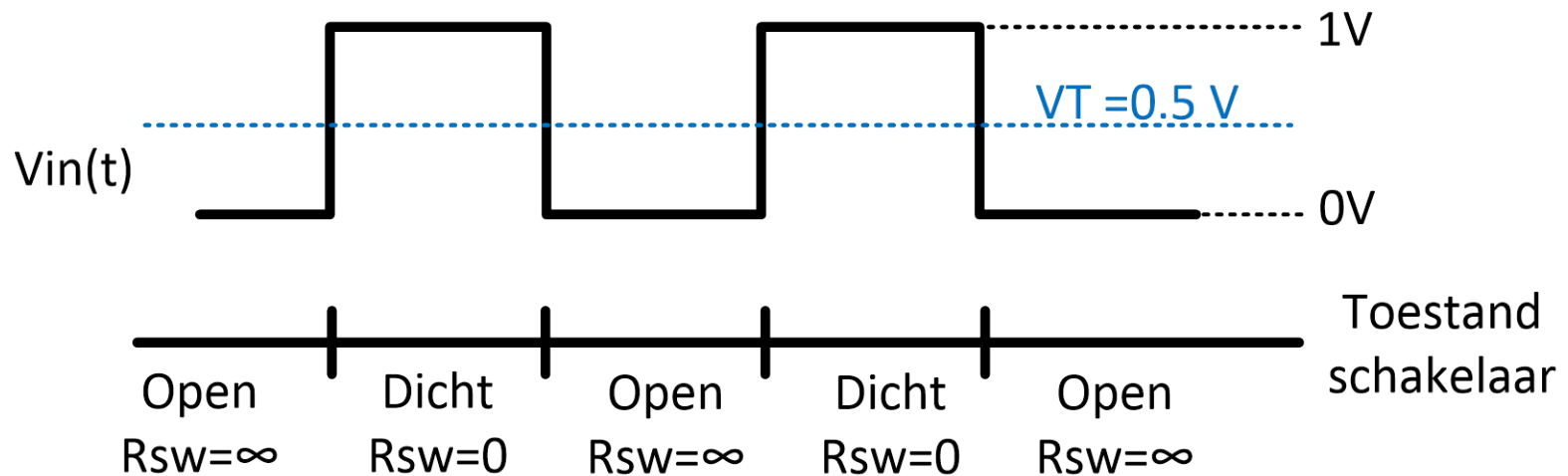
- Ideale schakelaar

- Kortsluiting als  $V_x > V_T$
- Open keten als  $V_x \leq V_T$

- Voorbeeld:  $V_o$ ?

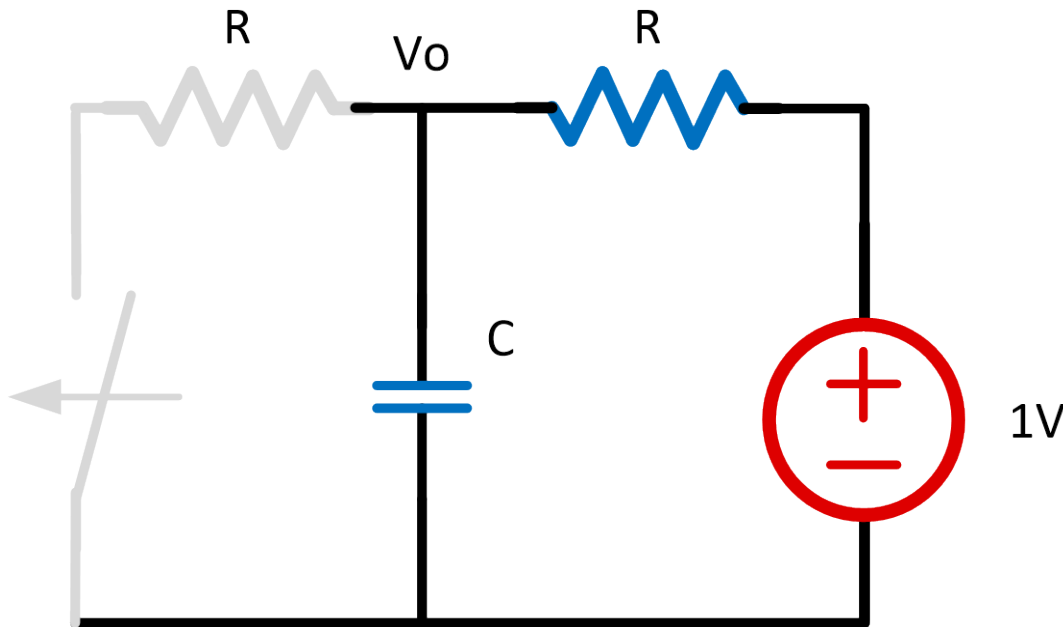


## ■ Ingangssignaal

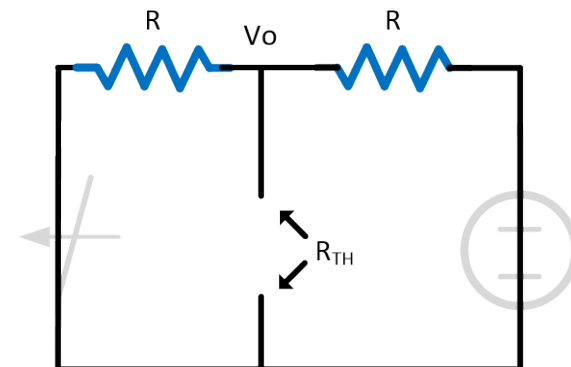
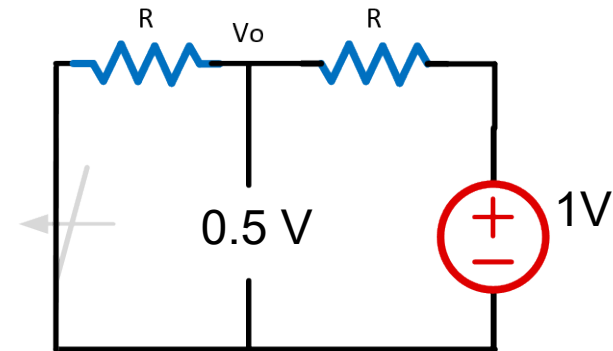
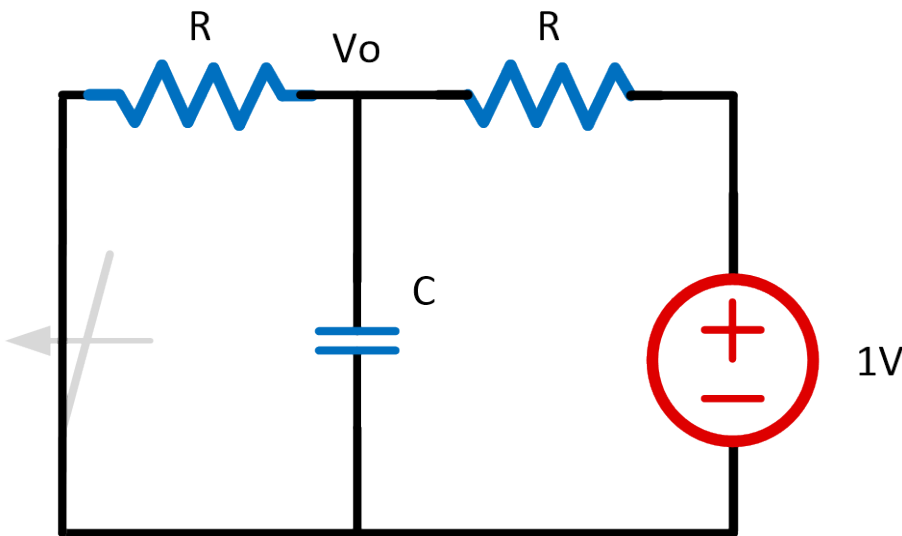


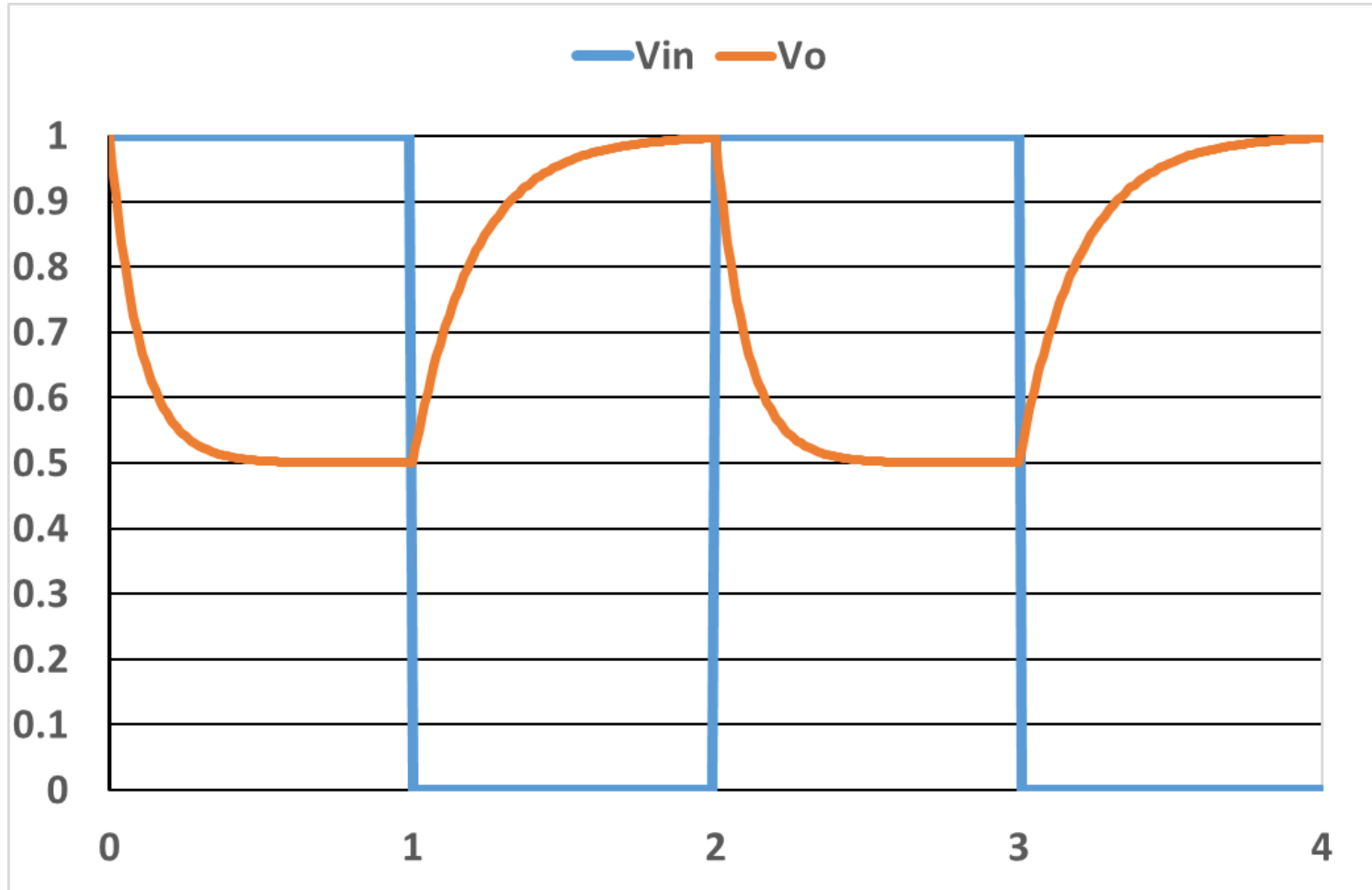


- Schakelaar open –  $R_{sw} = \infty$   
→ Condensator laadt op met  $\tau = RC$



- Schakelaar **dicht** –  $R_{sw} = 0$ 
  - Condensator ontladst met  $\tau=RC/2$
  - Condensator ontladst naar 0.5 V  
(als  $\tau$  klein genoeg is t.o.v. de schakelfrequentie)



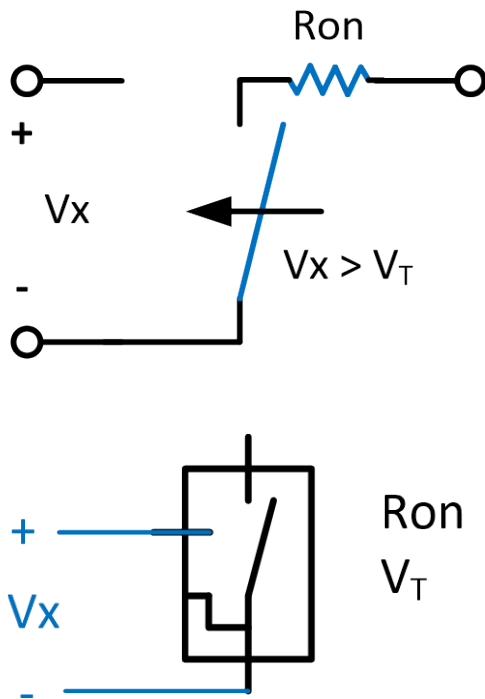


$RC=0.2$

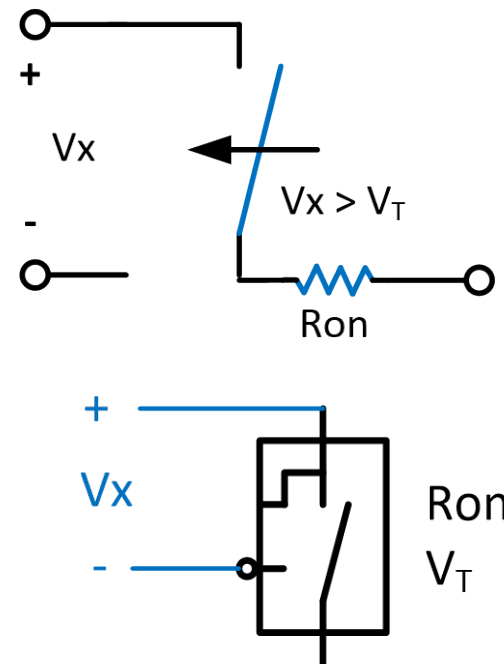
gecorrigeerd

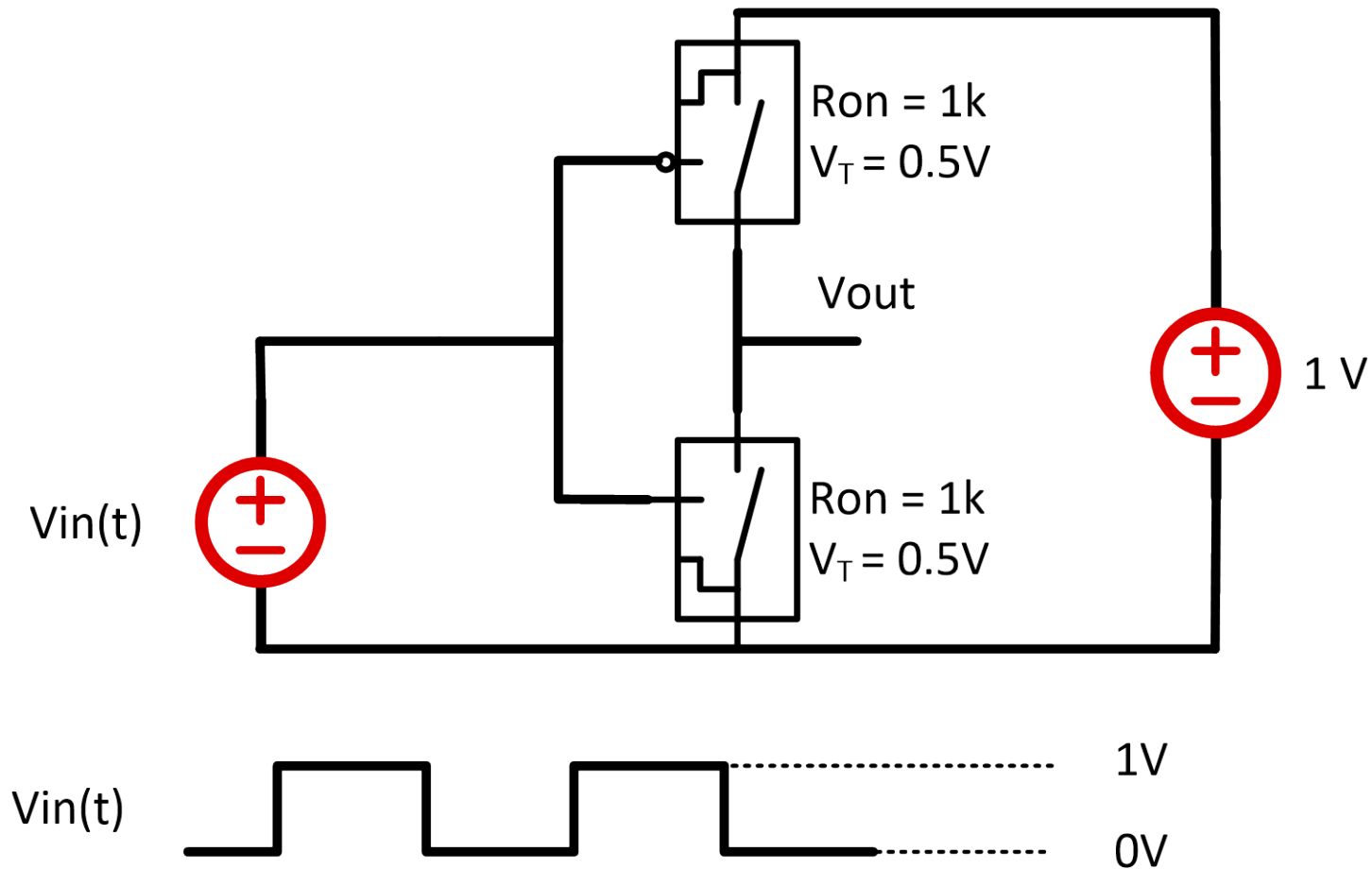
- Reële schakelaars hebben een aan weerstand
- Stuurspanning staat t.o.v. een van de klemmen van de schakelaar

n schakelaar



p schakelaar

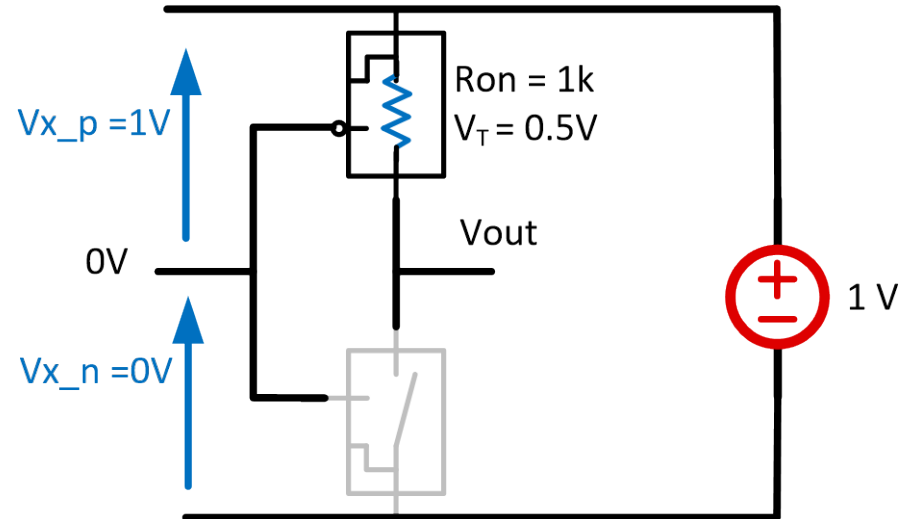




# Invertor: 2 gevallen

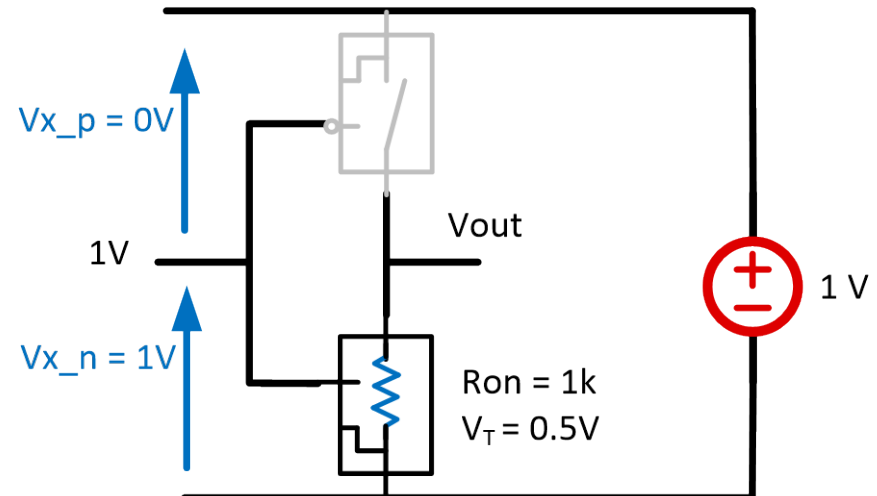
- Geval 1:  $V_{in} = 0$ 
  - $V_{x\_p} = 1\text{ V} \rightarrow R_p = R_{on}$
  - $V_{x\_n} = 0\text{ V} \rightarrow R_n = \infty$

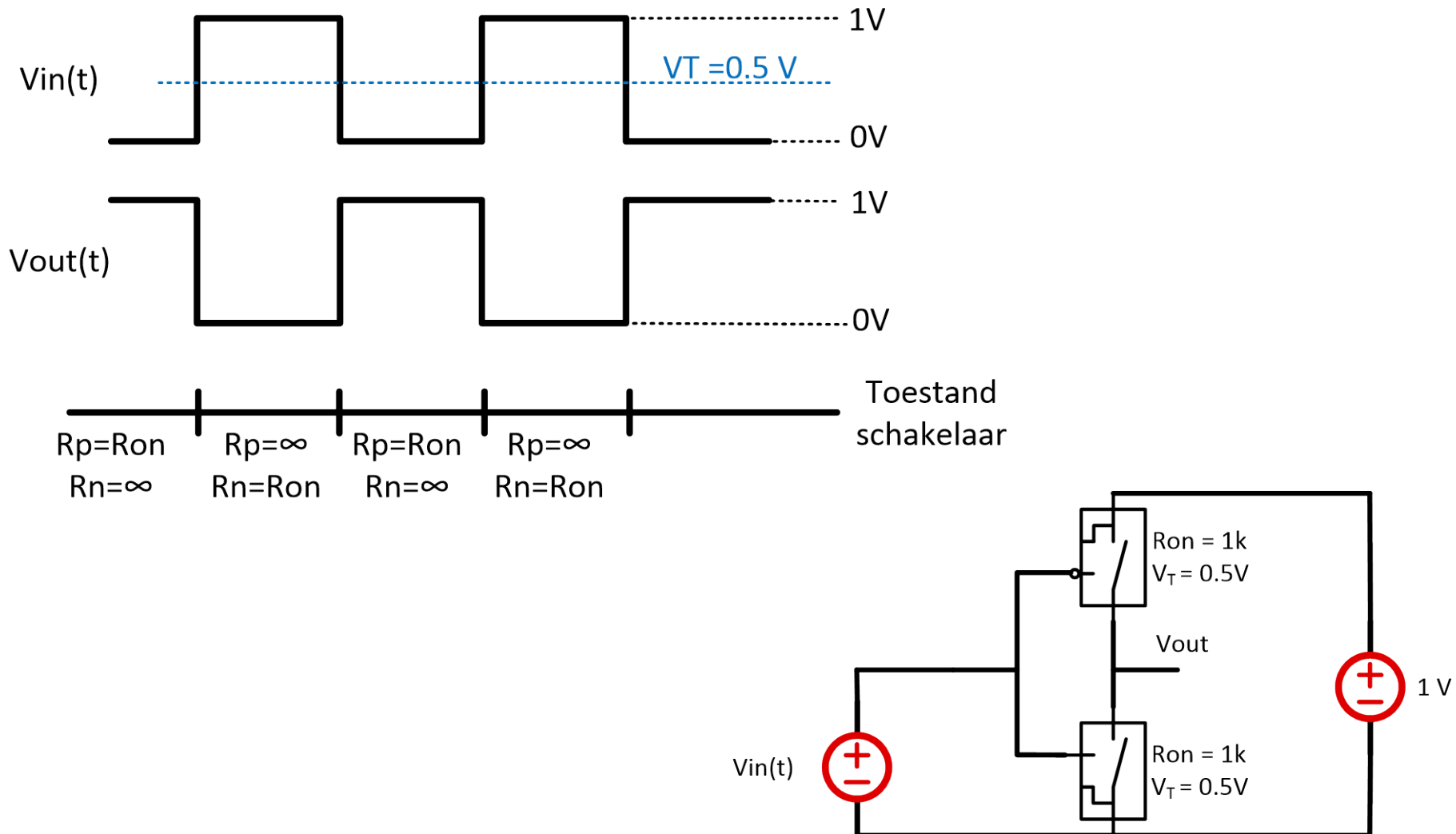
$\rightarrow V_{out} = 1\text{ V}$



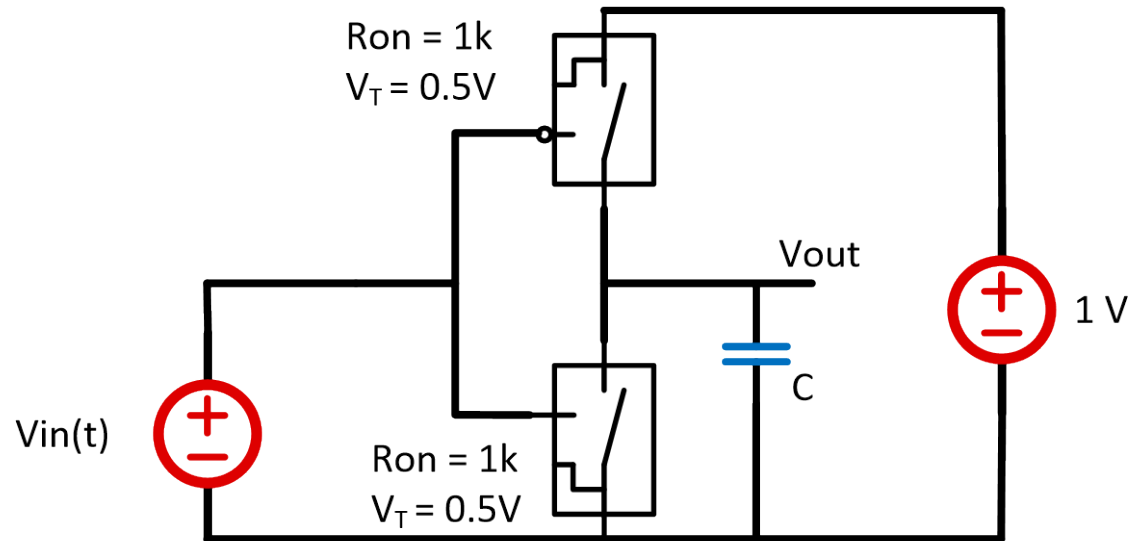
- Geval 2:  $V_{in} = 1$ 
  - $V_{x\_p} = 0\text{ V} \rightarrow R_p = \infty$
  - $V_{x\_n} = 1\text{ V} \rightarrow R_n = R_{on}$

$\rightarrow V_{out} = 0\text{ V}$





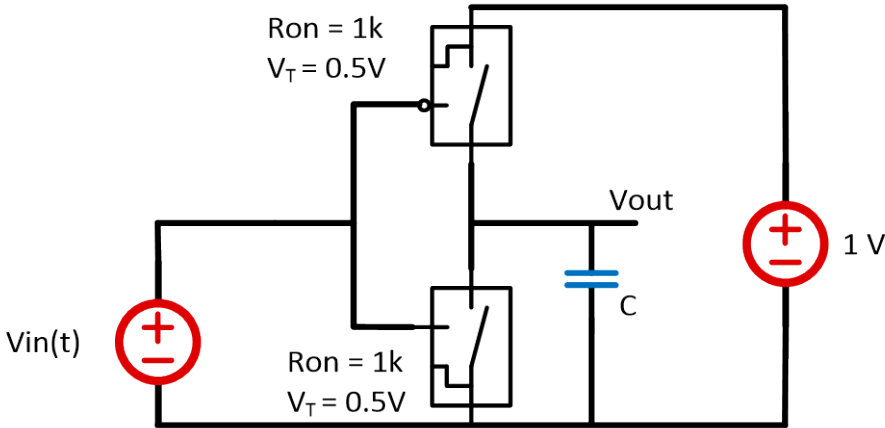
# In de praktijk is er altijd C (I)



De C wordt op- of ontladen via de  $R_{on}$  van de schakelaars  
De tijdsconstante is dus  $RC$

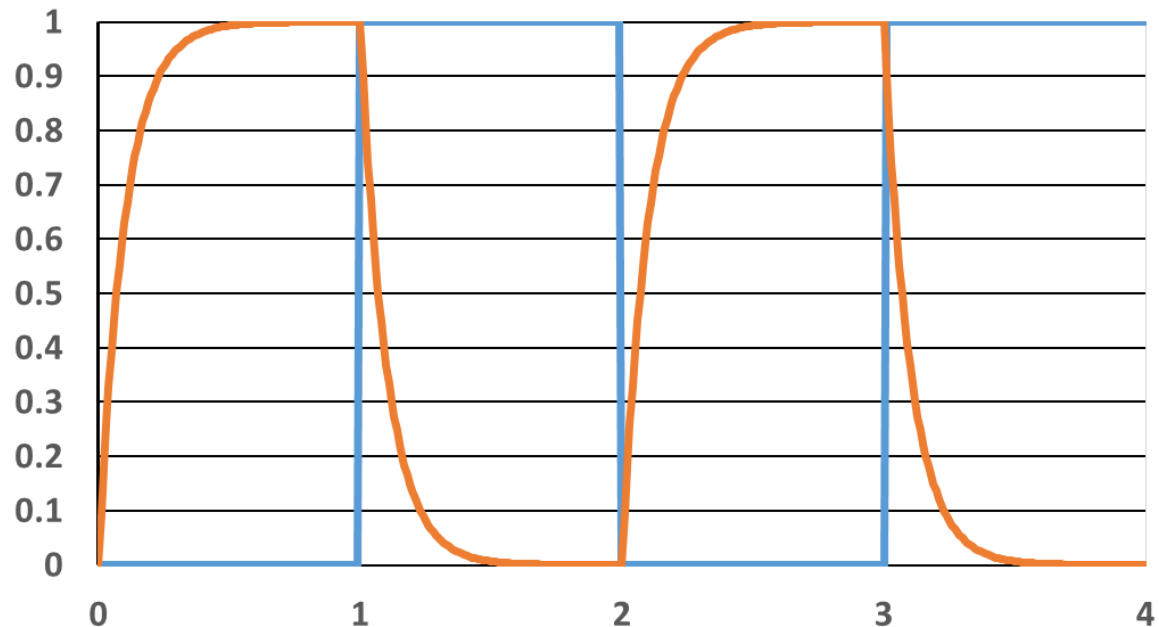


# In de praktijk is er altijd C (II)

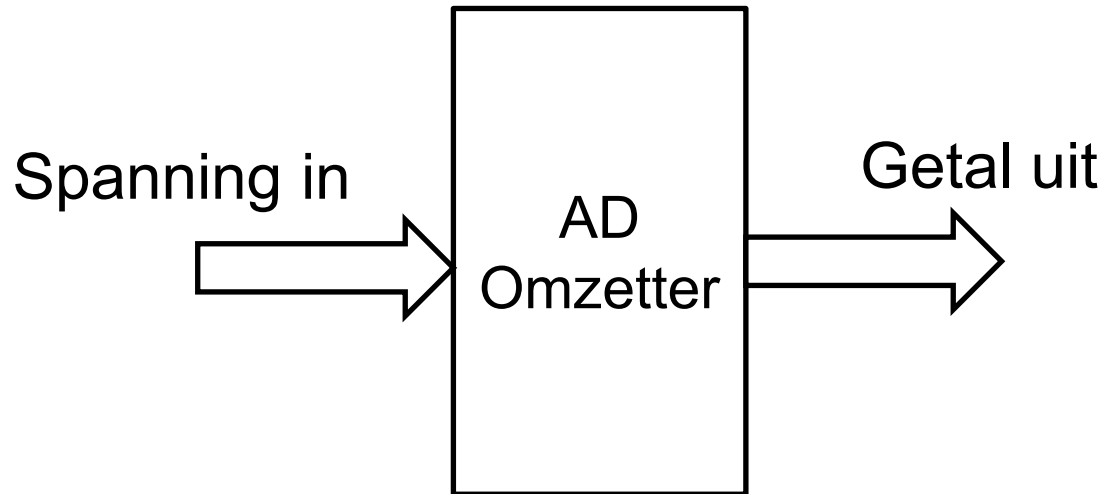


Een reële invertor vertraagt het signaal!

—  $V_{in}$  —  $V_{out}$



- Informatie wordt elektronisch voorgesteld als
  - elektrische spanning [Volt]
  - elektrische stroom [Ampere]
  - frequentie van een signaal [Hz]
  - faze van een signaal [rad]
  - ...
- Voorbeeld:
  - microfoon geeft geluidssterkte weer als een spanning
  - informatie wordt frequentie gemoduleerd voor radio transmissie
- Het kan ook digitaal: signalen als getallen voorstellen en er mee rekenen.



- Getal wordt binair voorgesteld met bits
- Voorbeeld 10 bit AD omzetter

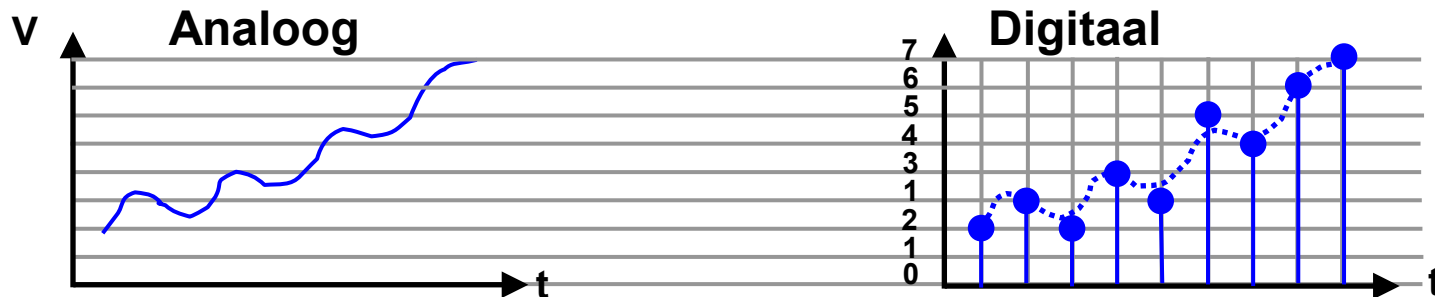
$0\text{ V} \rightarrow \text{'getal' } 0$  ,  $5\text{ V} \rightarrow \text{'getal' } 1023$

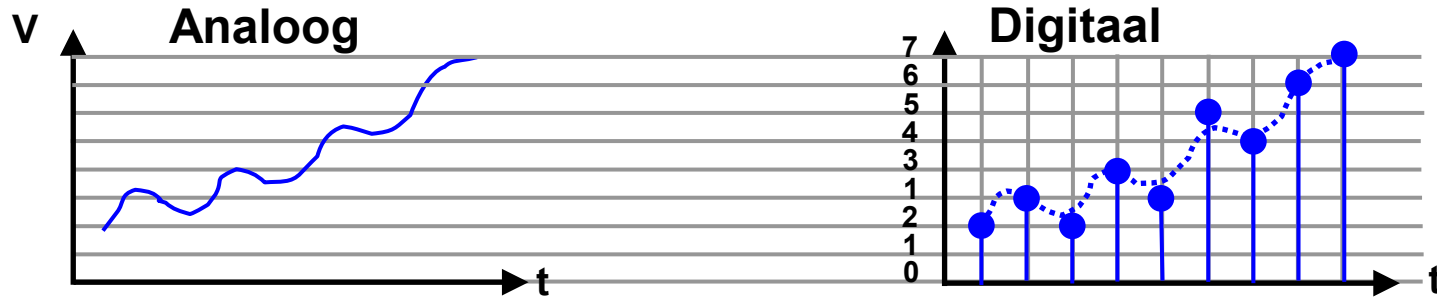
$x\text{ V} \rightarrow \text{'getal' } \frac{x}{5} 1023$

$\frac{5}{1023}\text{ V} \rightarrow \text{'1 bit' of 1 LSb (least significant bit)}$

- Bit wordt voorgesteld met spanningsniveaus
  - “0” = Laag = logisch ‘niet waar’ ‘false’ = 0V
  - “1” = Hoog = logisch ‘waar’ ‘true’ = Voedingsspanning  
bv. 5V op Arduino
  
- Tussenliggende spanningsniveaus zijn verboden
  
- De signalen bestaan dan uit een aantal bits waar we mee kunnen rekenen

- Signalen in de natuur zijn meestal analoog
  - variëren continu in de tijd
  - kunnen een continu bereik van waarden aannemen
- Deze signalen kunnen gedigitaliseerd worden
  - bemonsteren: enkel beschouwen op discrete ogenblikken in de tijd
  - discrete waarden in amplitude (spanning in dit vb.)

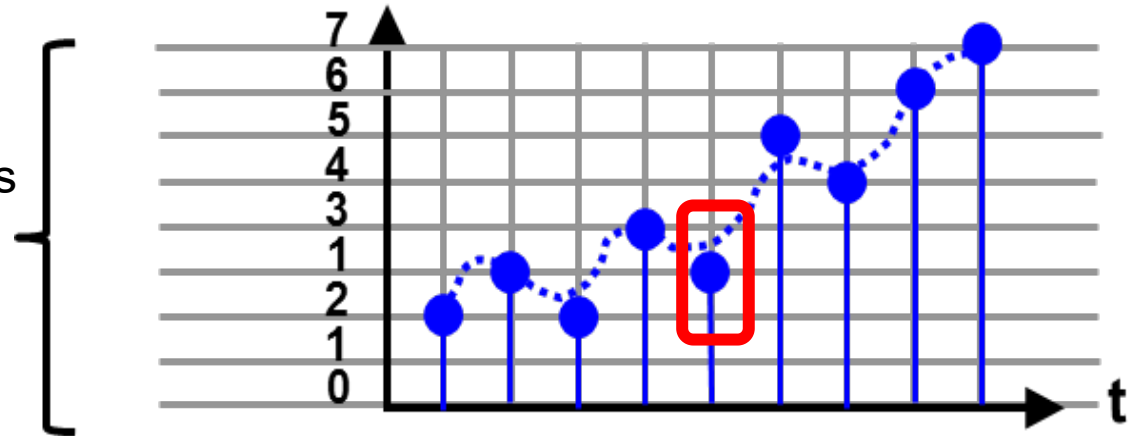




## ■ Nauwkeurigheid in de tijd / X-as

- Nyquist/Shannon: 2x sneller bemonsteren dan de hoogste frequentie in het signaal
- Voorbeeld: geluid gaat tot 20 kHz
  - CD bevat geluidssignaal bemonsterd op 44.1 kHz ( $> 2 \times 20 \text{ kHz}$ )

Afronding naar deze 8 niveaus  
Max fout =  $\frac{1}{2}$  bit

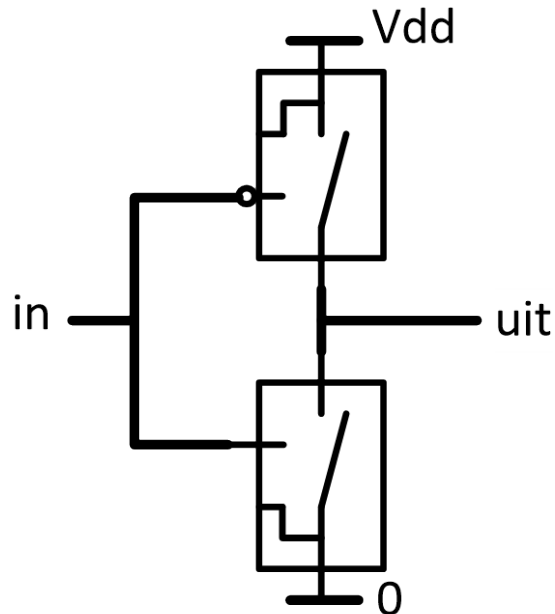


- Nauwkeurigheid in de amplitude/ Y-as
  - Met eindig aantal bits zijn er altijd afrondingsfouten (quantisation errors)
  - Het aantal bits kan echter steeds groter gemaakt worden
  - Voorbeeld: CD geluid wordt voorgesteld met 16 bits
    - Max. afrondingsfout is  $\frac{1}{2}$  bit
    - Bij max signaal 1V  $\rightarrow$  afrondingsfout  $1/2^{17} = 8 \mu\text{V} \rightarrow$  niet hoorbaar

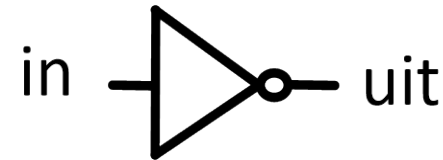
- Tekst met bits voorstellen
  - Er zijn 26 letters in het alfabet + leestekens + cijfers + hoofdletters + ...  
→ (minstens) 100 tekens
  - $2^7 = 128$  → met 7 bits kunnen we 128 tekens voorstellen
- Beelden met bits voorstellen
  - In puntjes verdelen, bv  $1024 \times 1024$
  - Ieder puntje heeft een kleur: met 8 bit 256 ( $=2^8$ ) kleuren
  - Beeld bevat  $1024 \times 1024 \times 8 = 268,435,456$  bits
- Getallen met bits voorstellen
  - Met 16 bits alle getallen  $x$ ,  $0 \leq x < 65536$







Symbool voor invertor



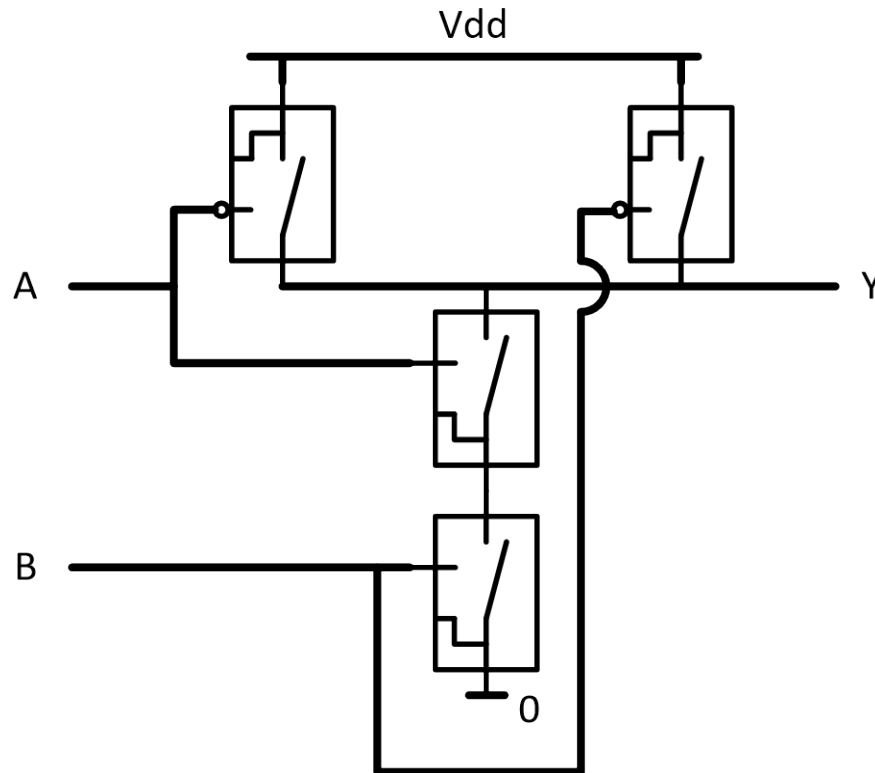
We kennen

- $R_{on}$  van de schakelaars
- $C$  aan de uitgang

→ We kunnen de vertraging van de poort berekenen

$V_{dd}$  is de voedingsspanning

- Door schakelaars in serie te zetten kunnen we ingewikkeldere logische functies maken



$$Y = \text{not} (A \text{ and } B) = \overline{A \cdot B}$$

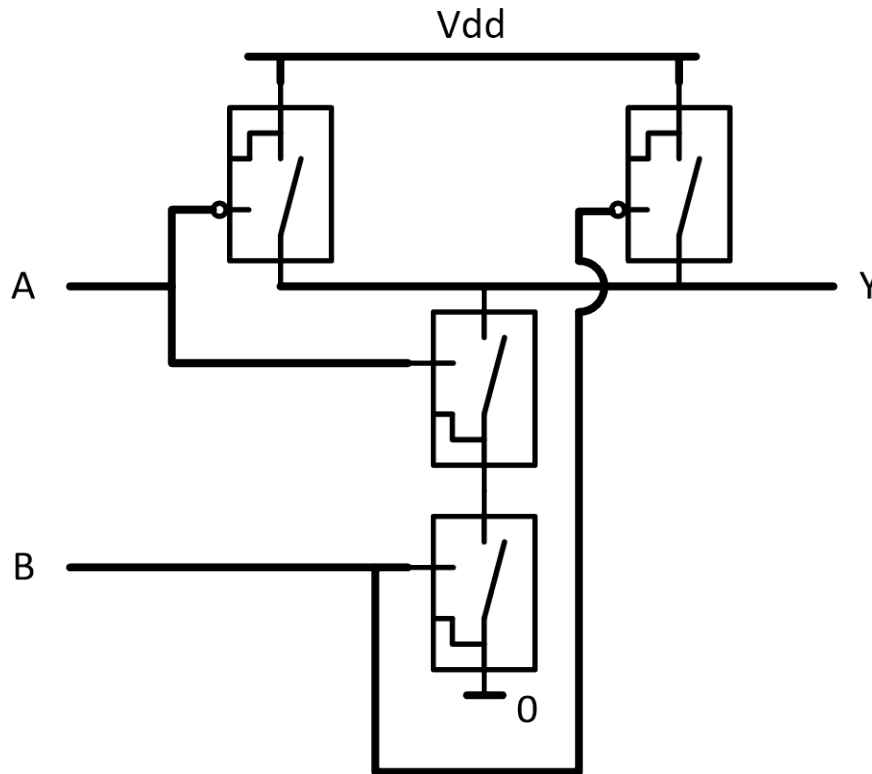
Y wordt enkel "0" als

- Beide n schakelaars geleiden
- Als A en B hoog zijn

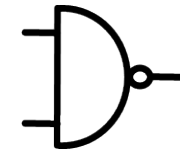
Als A of B hoog zijn geleidt er minstens 1 p schakelaar → Y="1"

NAND gate

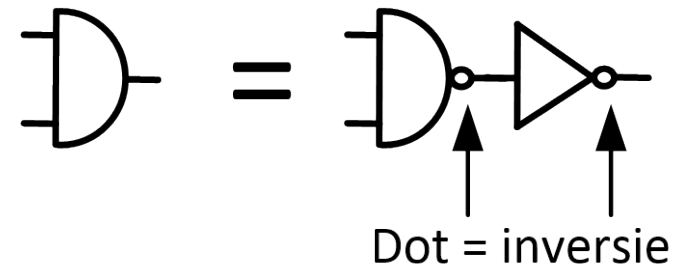
- Door schakelaars in serie te zetten kunnen we ingewikkeldere logische functies maken

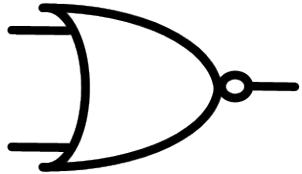


NAND gate

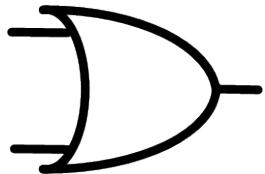


AND gate





$$\text{NOR} \rightarrow Y = \text{not} (A \text{ or } B) = \overline{A + B}$$



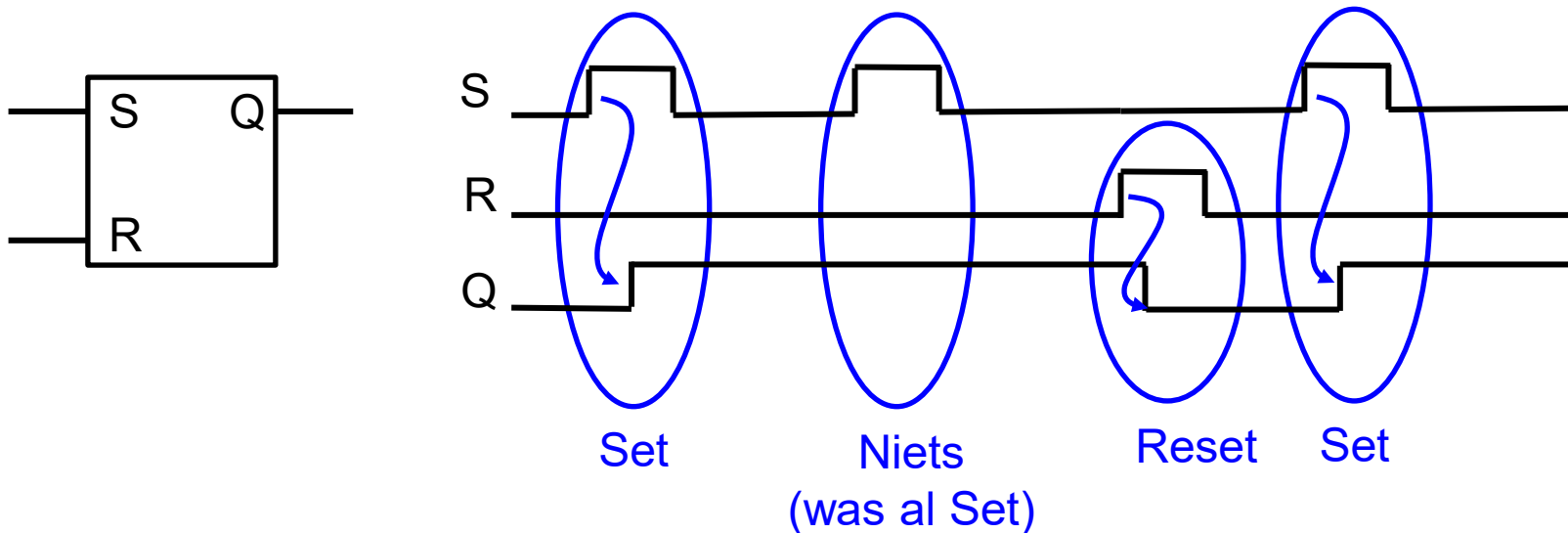
$$\text{OR} \rightarrow Y = A \text{ or } B = A + B$$

Hoe maak je een OR gate met n/p schakelaars?

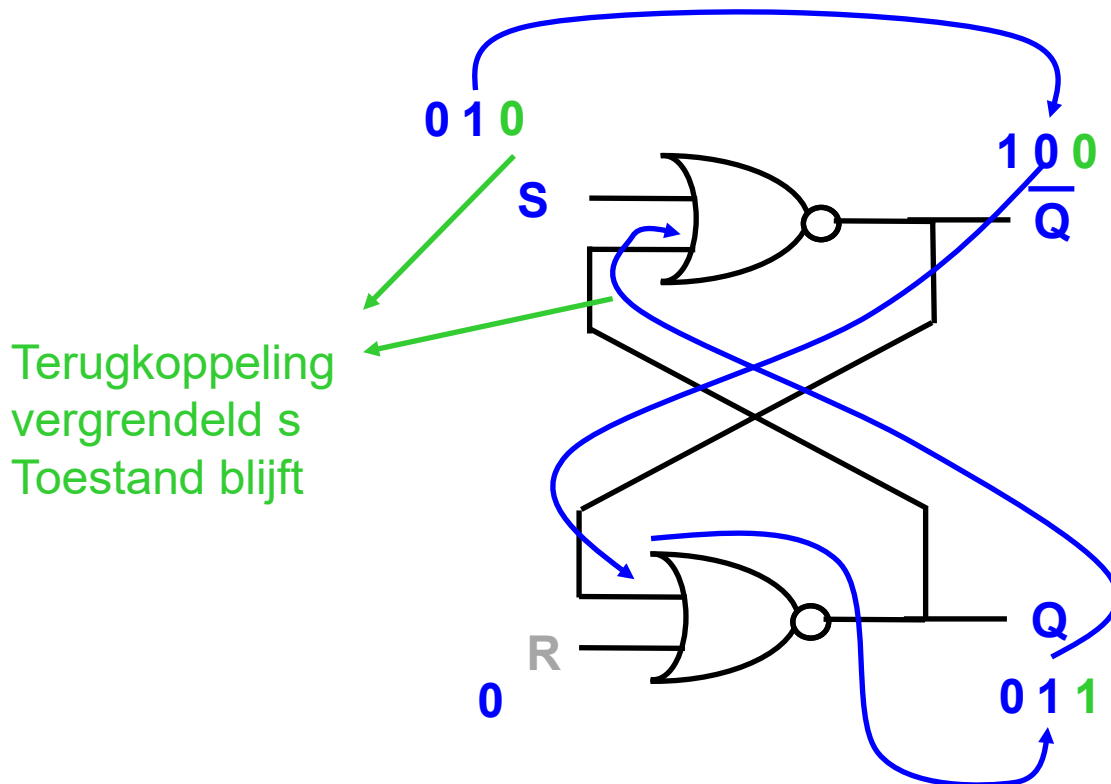
# Hoe maak je een NOR ?

---

- Digitale systemen moeten ook geheugen hebben
- Een Set Reset latch is een voorbeeld van een eenvoudig geheugen.



- Teruggekoppelde poorten krijgen geheugen
- Voorbeeld Set Reset latch met Nor poorten



- Als we logische poorten en geheugens kunnen maken dan opent dit de weg naar grotere complexiteit
- Met schakelaars en digitale circuits kunnen we abstractie maken van de elektrische kant van de zaak
- Dit opent de weg naar automatisatie van (stukken van) het ontwerp proces
- Dit opent de weg naar, processoren, modems, smart phones, ...



## Abstractieniveaus

**Systeem**



**Architectuur**



**Poort**

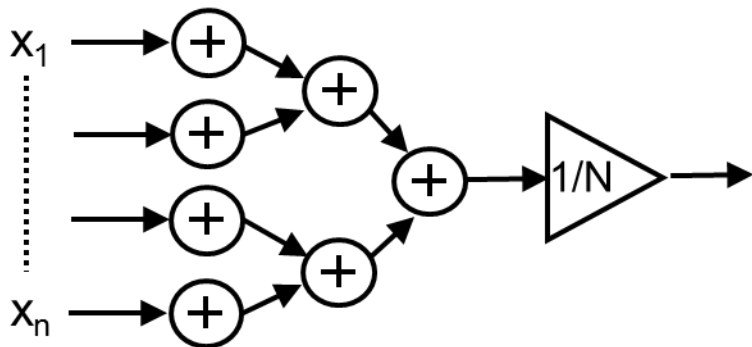


**Schakelaar**

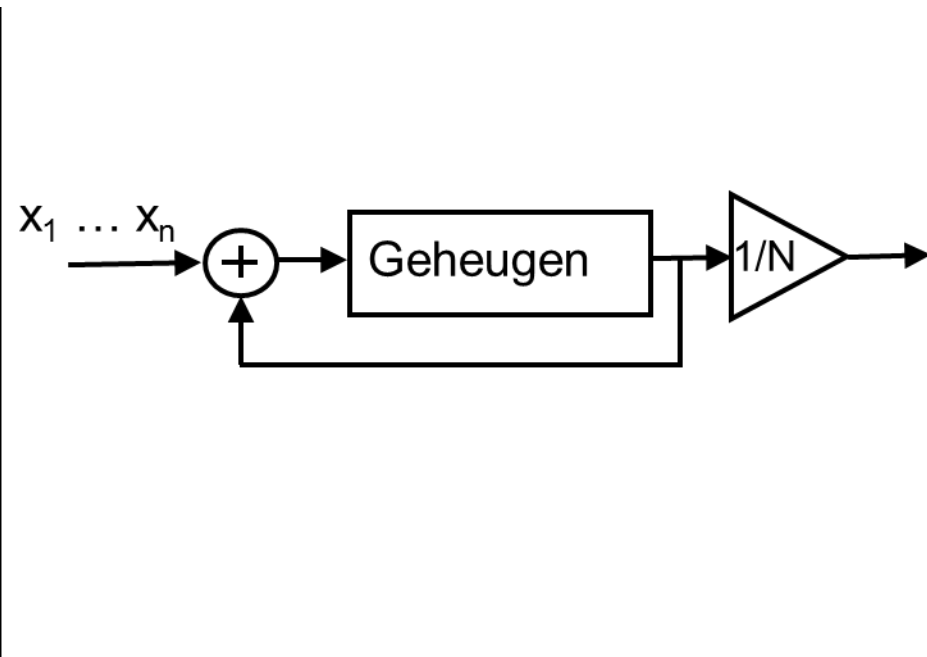
- Specificatie: bereken het gemiddelde

- Systeem:  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i$

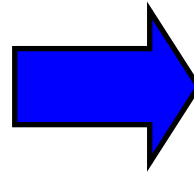
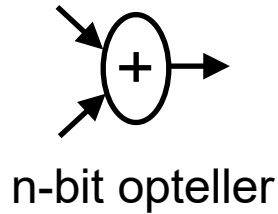
- Architectuur



of



# Abstractieniveaus – voorbeeld (II)

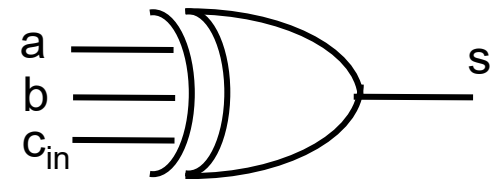


Kan gemaakt worden met poorten.

1bit Opteller: op basis van logische poorten AND, OR, NOT, ...

$$s = \text{som}(a, b, c_{in}) = a \wedge b \wedge c_{in}$$

$$c_{uit} = \text{overdracht}(a, b, c_{in}) = ab + bc_{in} + ac_{in}$$



- Logische poorten worden gemaakt met spanningsgestuurde schakelaars”
- Spanningsgestuurde schakelaars zijn een abstractie voor transistoren
- Transistoren kunnen gemaakt worden op een chip!  
Dit is de uiteindelijke fysische realisatie.

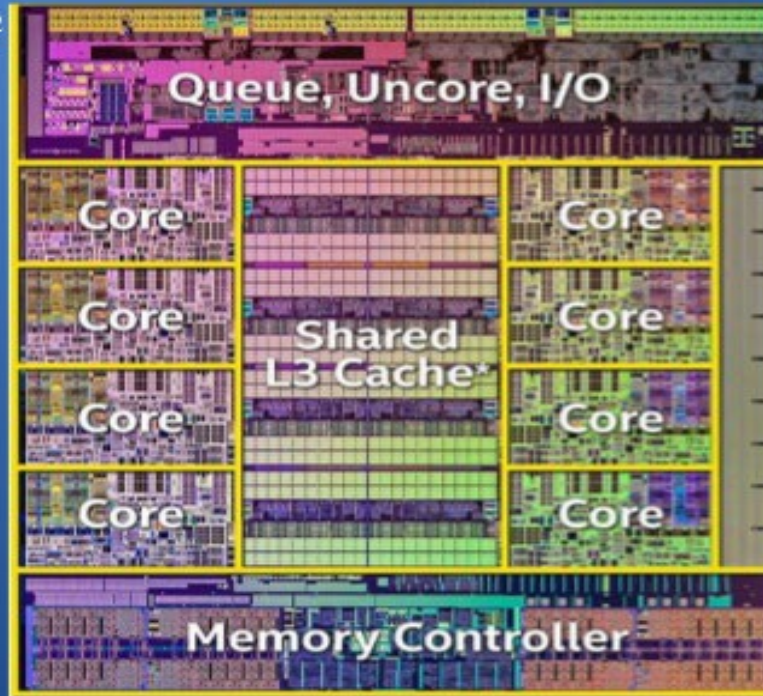
# Een chip! En geen kleintje ...

## Intel Core i7-5960X

2.60 Billion Transistors, Die size 356mm<sup>2</sup>



i7-5960X

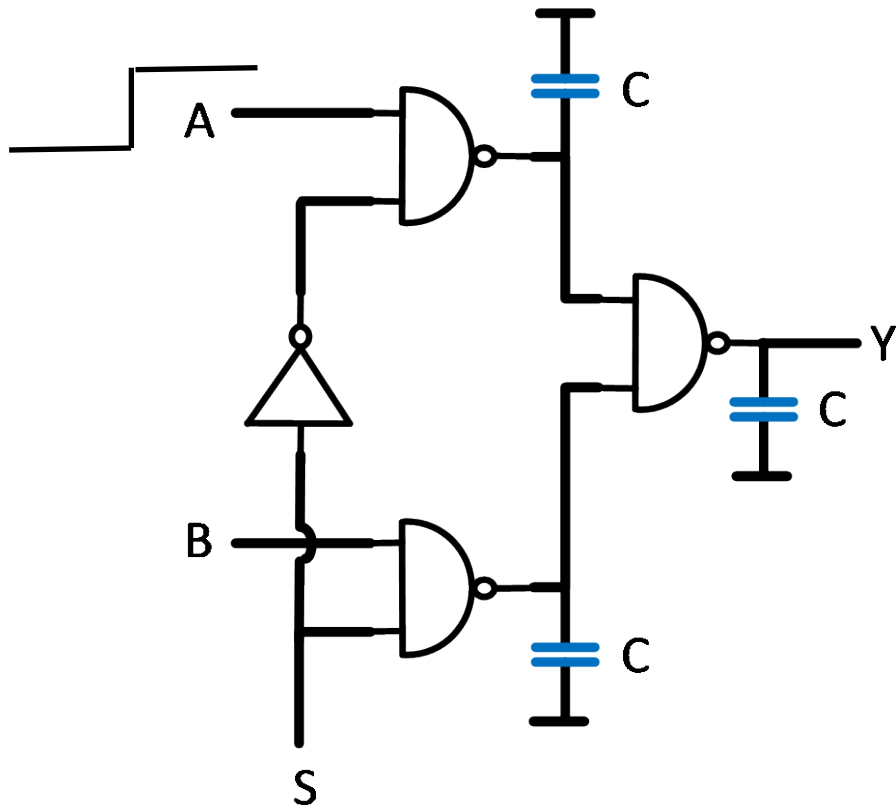


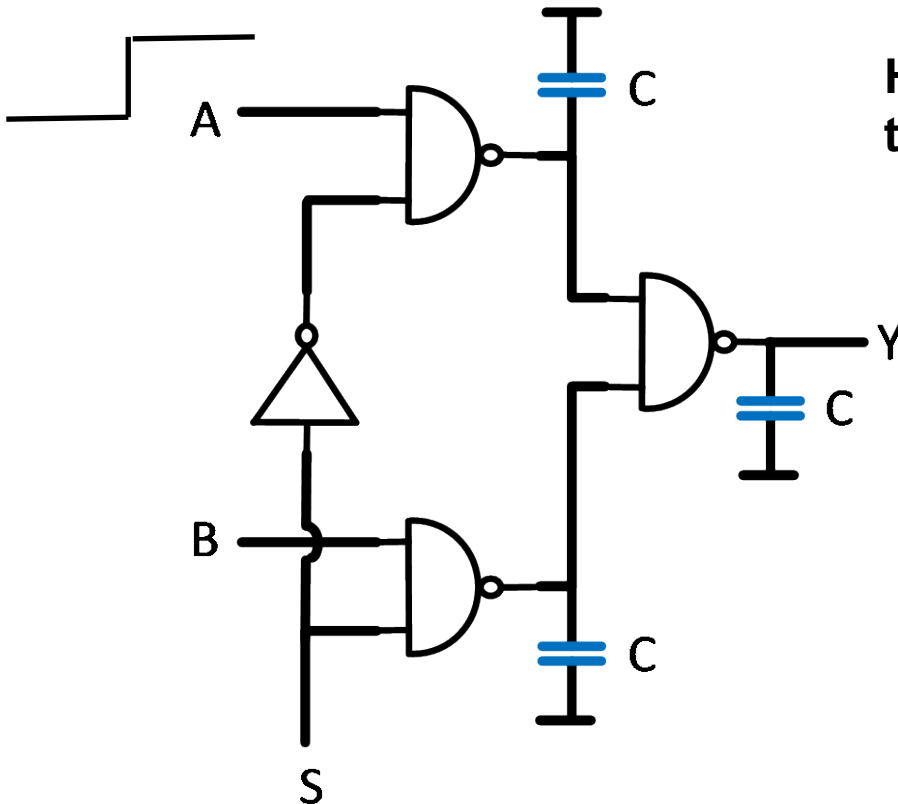
## Hoe snel is dit ding?

- Voorbeeld: multiplexer

$$Y = (\text{not } S \text{ and } A) \text{ or } (S \text{ and } B)$$

Als  $S=0 \rightarrow Y=A$ , als  $S=1 \rightarrow Y=B$





Hoe lang duurt het voor een stap op A te zien is aan Y (S=0)?

Alle schakelaars in alle gates:

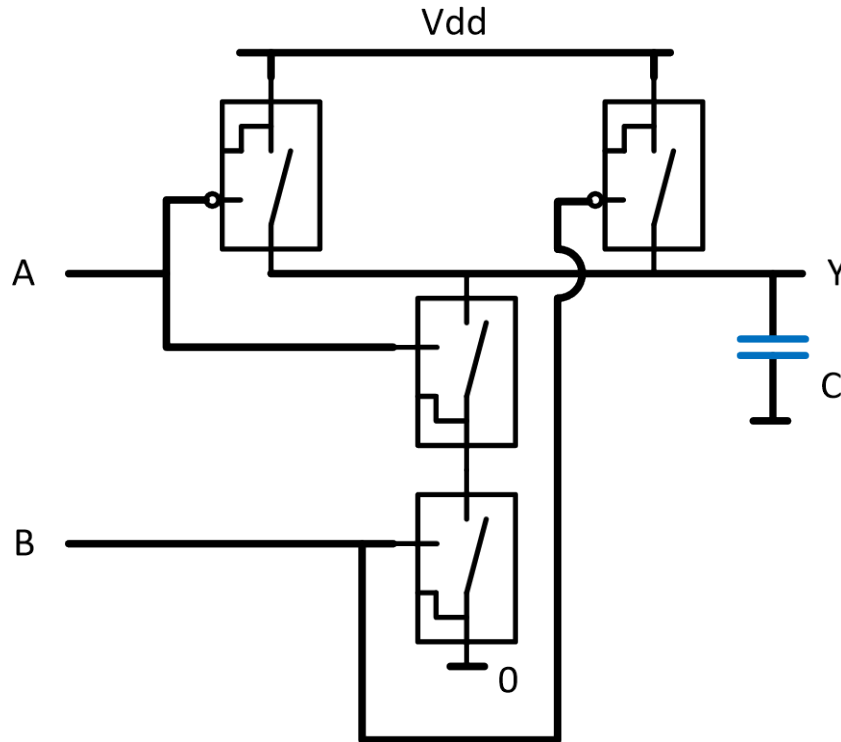
$$R_{on} = 100$$

$$V_T = 0.5V$$

$$V_{dd} = 1V$$

$$C = 1 \text{ pF}$$

# Vertraging NAND poort belast met C



Als  $A=1$  and  $B=1$  dan  $Y=0$

Hoe lang duurt het voor  $A 1 \rightarrow 0$  te zien is als  $Y 0 \rightarrow 1$

Alle schakelaars in alle gates:

$$R_{on} = 100$$

$$C = 1 \text{ pF}$$

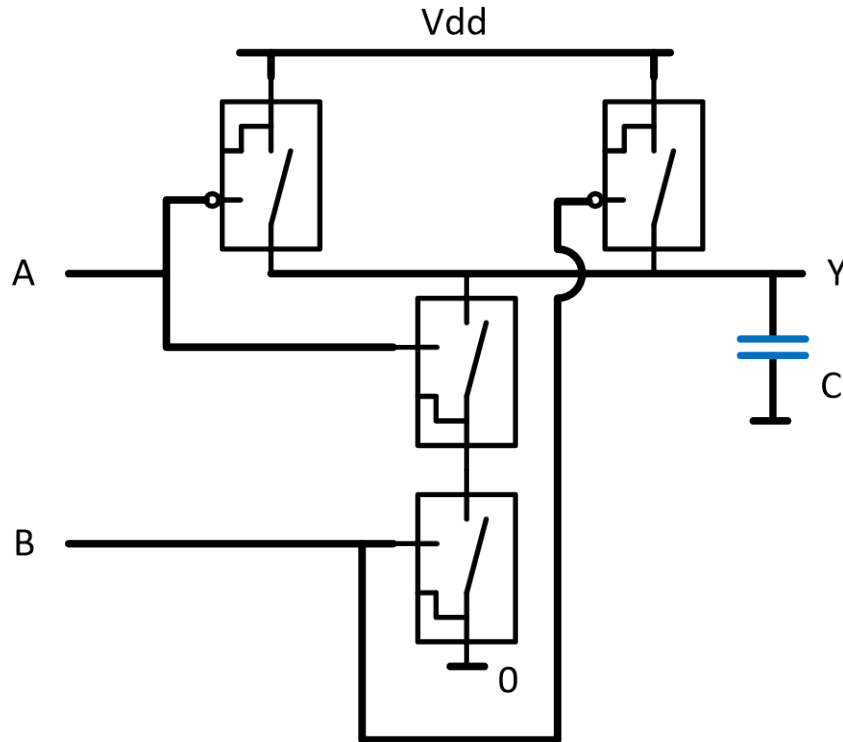
$C$  wordt opgeladen via 1 p-schakelaar  $\rightarrow \tau = R_{on} \cdot C = 100 \text{ ps}$

(het kan ook dat beide p-schakelaars, in parallel, aan zijn.

Dan gaat het sneller. ( $\tau = R_{on}/2 \cdot C$ ). We zoeken echter het traagste geval.



# Vertraging NAND gate belast met C (I)



Als A=0 en B=1 dan Y=1

Hoe lang duurt het voor A 0→1 te zien is als Y1→0

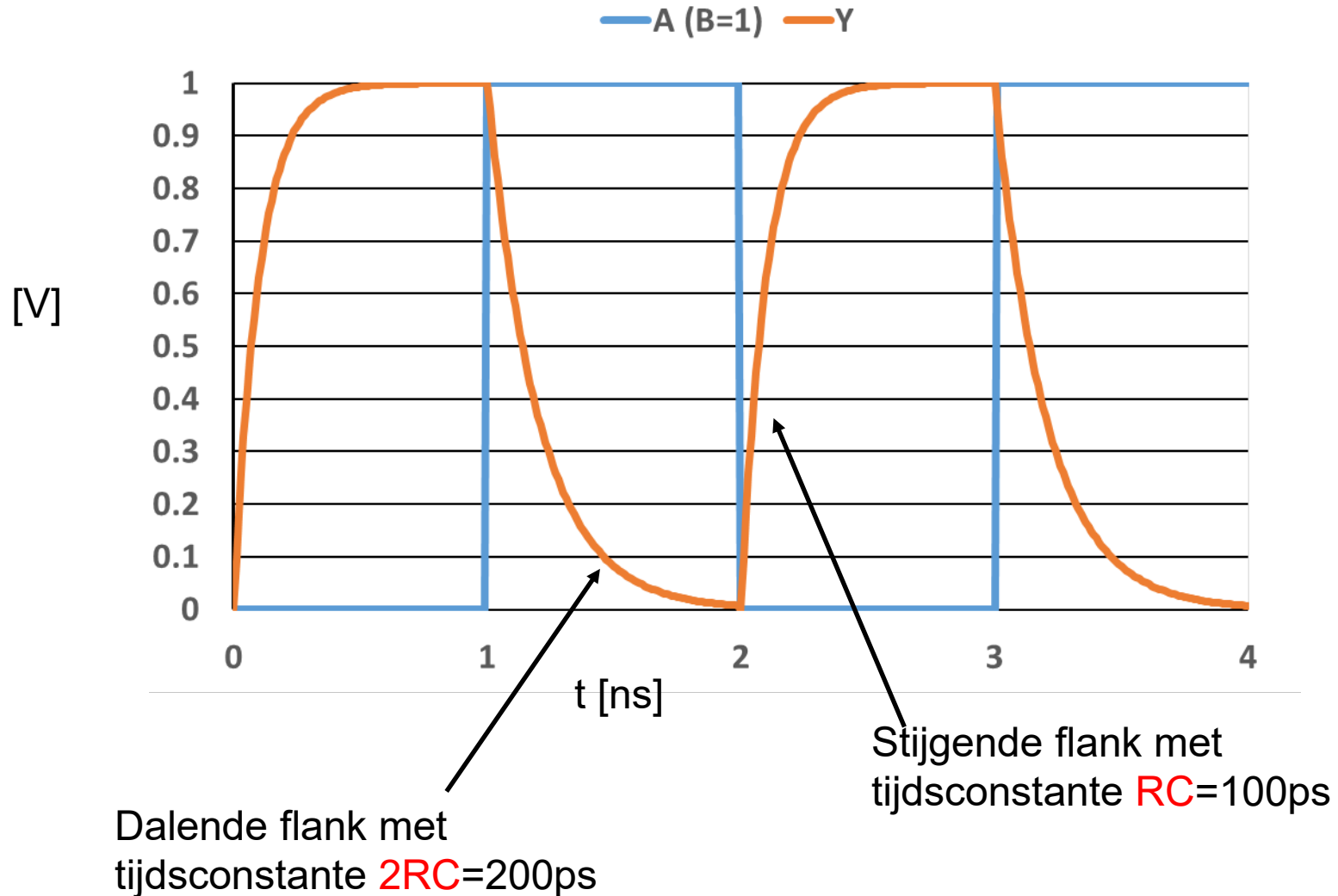
Alle schakelaars in alle gates:

$$R_{on} = 100$$

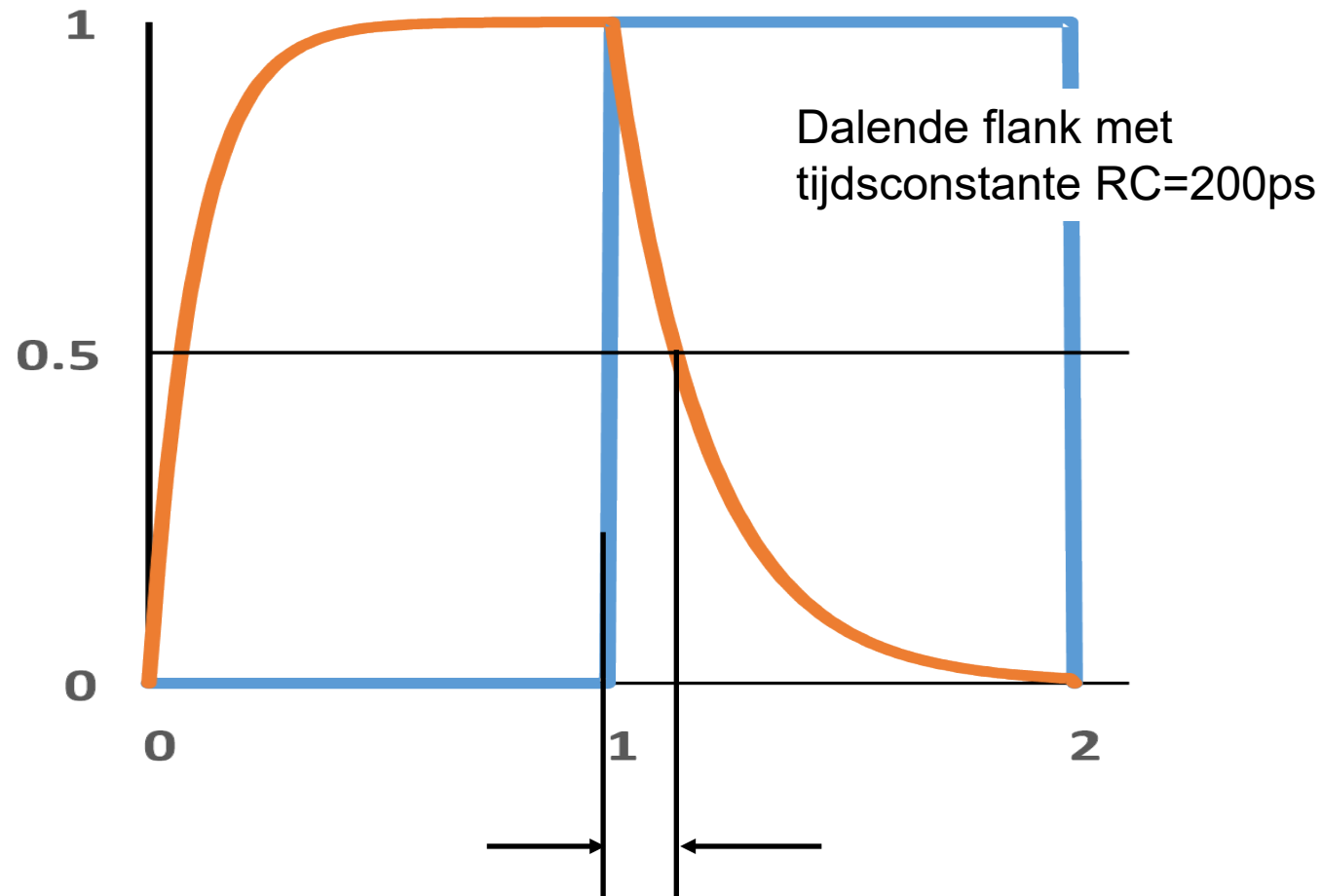
$$C = 1 \text{ pF}$$

- C wordt ontladen via 2 n-schakelaars in serie  $\rightarrow \tau = 2 \cdot R_{on} \cdot C = 200 \text{ ps}$

# Vertraging nand poort belast met C (II)



# Tijdsconstante is niet de vertraging (I)



Vertraging word gemeten op  $V_{dd}/2$

Ontladen via curve van de vorm  $V_{dd} \cdot e^{-t/\tau}$

vindt t in

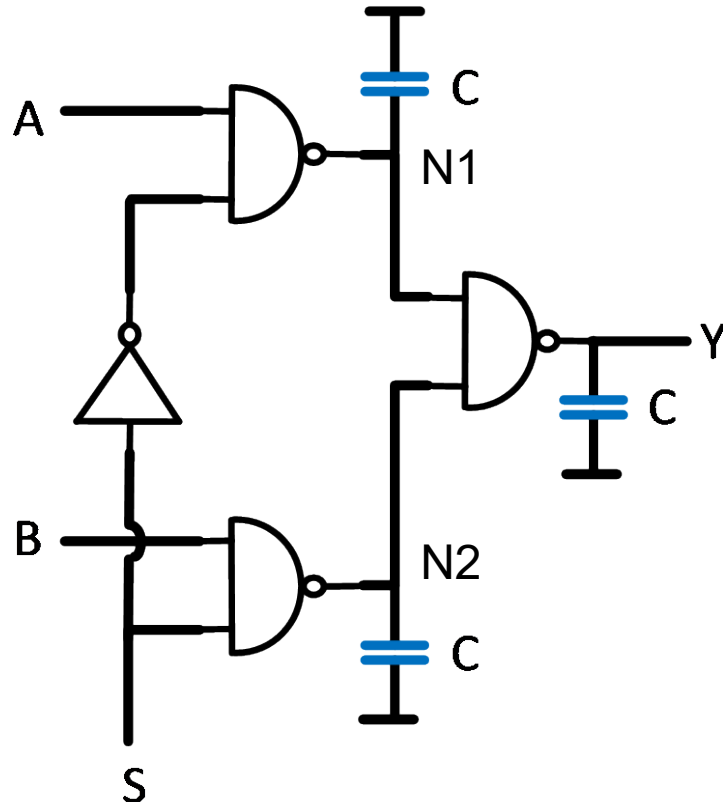
$$V_{dd} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{V_{dd}}{2}$$

$$e^{-t/\tau} = 0.5$$

$$t = -\tau \cdot \ln(0.5) = 0.69 \cdot \tau$$

**Vertraging van een poort = 0.69 x tijdsconstante**

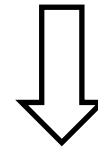
# Vertraging van de multiplexer (I)



Hoe lang duurt het voor een stap op A te zien is aan Y? (S=0)

A 0→1 geeft N1 1→0 en dan Y 0→1

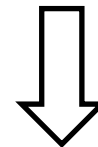
A 1→0 geeft N1 0→1 en dan Y 1→0



Vertraging is stijgende flank + dalende flank

$$t_{HL} = 0.69 \cdot 2 R_{on} C = 138 \text{ ps}$$

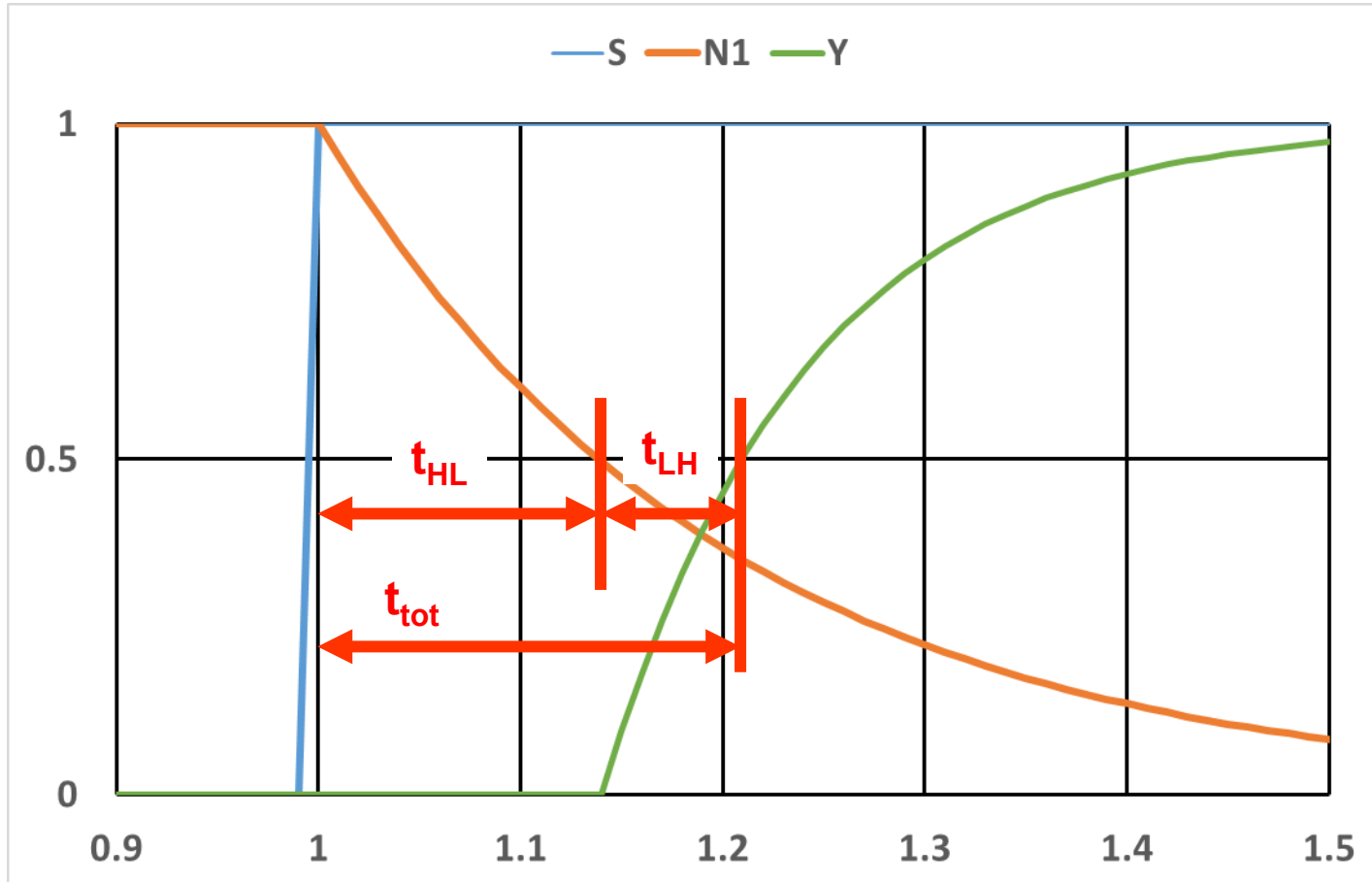
$$t_{LH} = 0.69 R_{on} C = 69 \text{ ps}$$



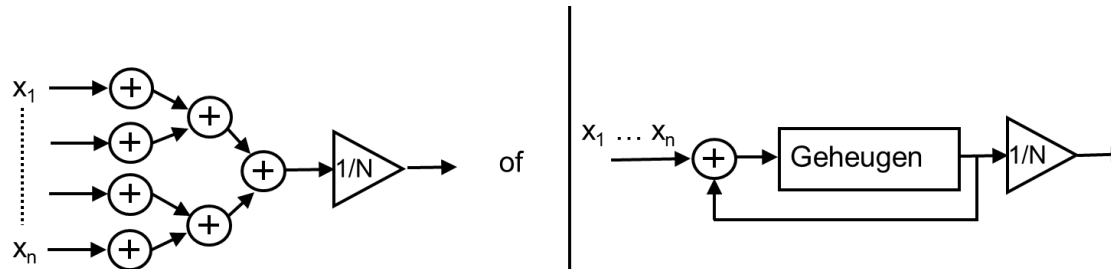
Totale vertraging

$$t_{tot} = t_{HL} + t_{LH} = 207 \text{ ps}$$

# Vertraging van de multiplexer (II)



- Voor we iets nieuws kunnen doen, moeten we wachten tot de signalen klaar zijn.



- Hoe sneller de “logica” is hoe sneller we kunnen werken.
- Snelheid wordt in de praktijk bepaald door de klokfrequentie: “de GHz van je laptop of smartphone
- Hoe sneller de logica hoe sneller we de klok kunnen maken.



# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Hoofdstuk 8

### AC analyse in regime toestand

W. Dehaene

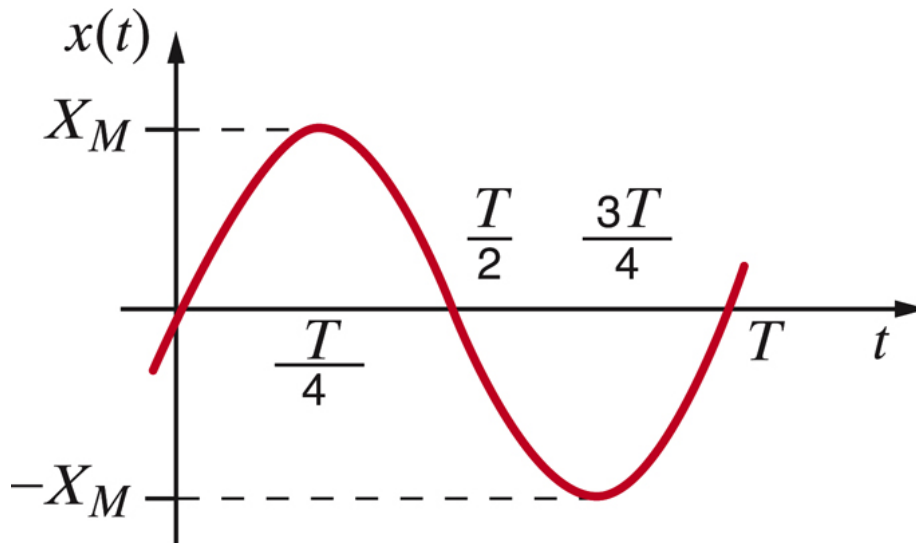
---



- Inleiding
  - Sinusoïde
  - Complexe functies
- Fazoren
- Impedantie en admittantie
- Complexe circuit analyse
- Voorbeelden
- Beginvoorwaarden en regimeoplossing

- Tot nu toe
  - 1e en 2e orde circuits via differentiaalvergelijkingen
  - Wiskundig nogal omslachtig
  - Enkel DC bronnen met schakelaars, pulsen
- We gaan nu sinusoidale spanningen en stromen invoeren
  - AC, Alternating Current of Wisselspanning
  - Eerste stap naar veralgemening voor willekeurige signalen via Fourier analyse

- Elementary my dear Watson

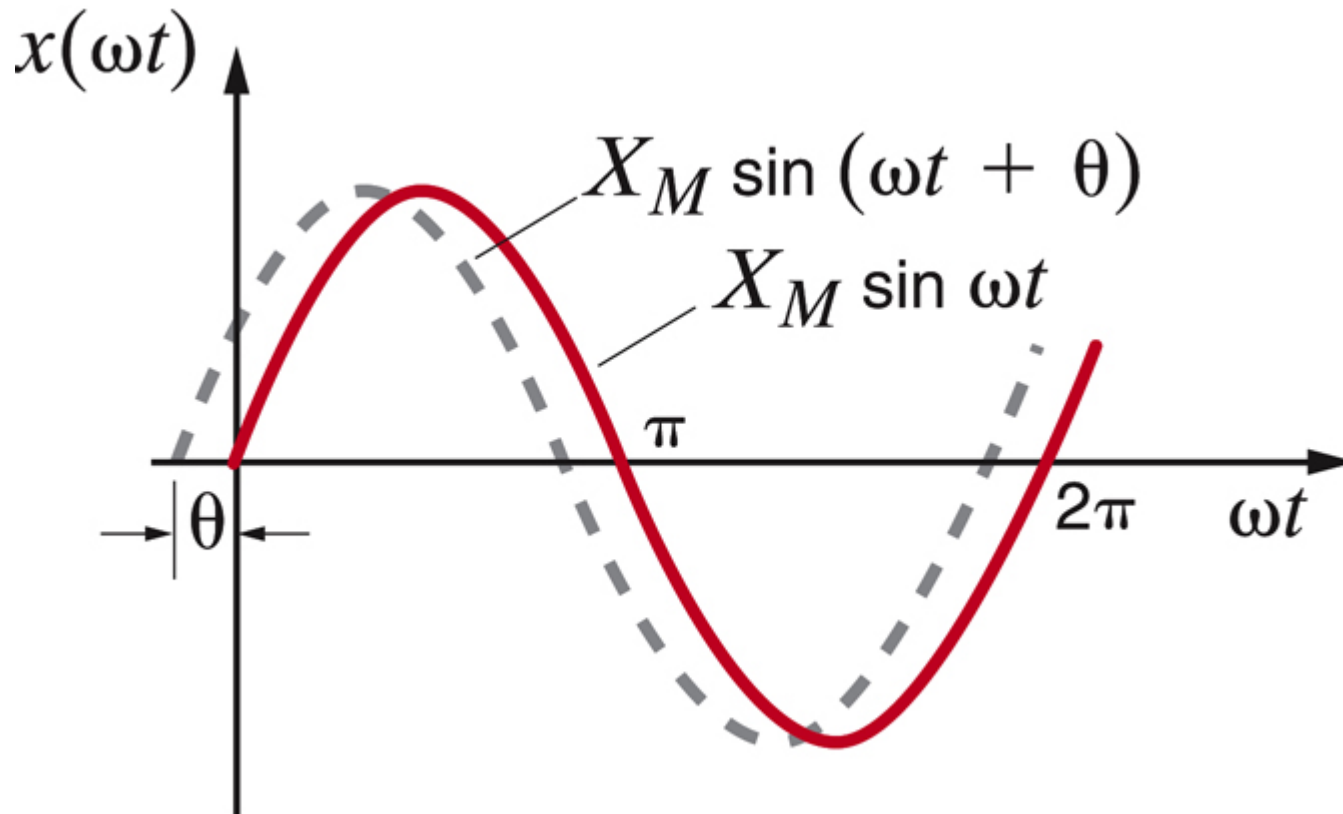


$$x(t) = X_M \sin(\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$

- $X_M$  amplitude
- Periode  $T$  in s, frequentie  $f$  in Hz,
- hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega$  in rad/s



“Phase lead” of “Voorrijlende faze”  
( $\theta < 0$ : phase lag of naijlende faze)

- We gaan eens proberen ...

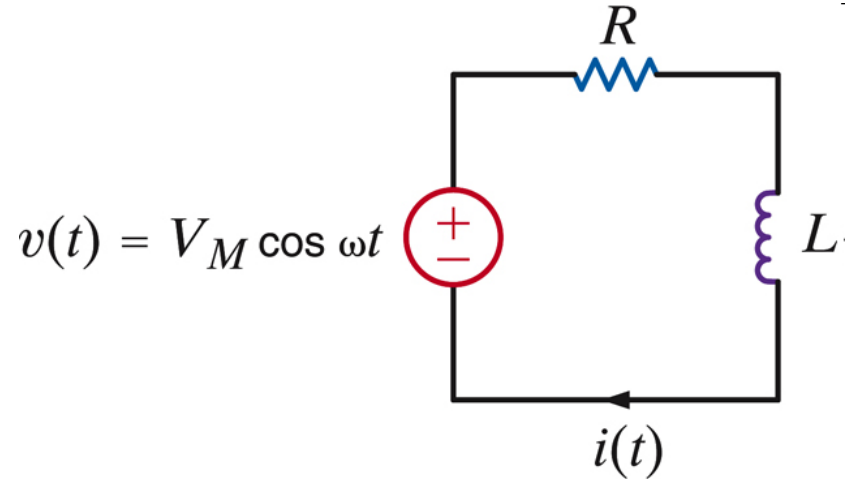
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

- Stel dat de oplossing voor  $i(t)$  ook een 'cos' is

$$i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t$$

$$i(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$



## We gaan eens proberen ...

- Oplossing invullen in de d-vgl

$$-A_1 \omega L \sin \omega t + A_2 \omega L \cos \omega t + R A_1 \cos \omega t + R A_2 \sin \omega t = V_M \cos \omega t$$

- Coefficienten van cos, sin in beide leden gelijk stellen

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_1 \omega L + A_2 R = 0 \\ A_1 R + A_2 \omega L = V_M \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A \cos \varphi = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} V_M \\ A_2 = -A \sin \varphi = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} V_M \end{array} \right.$$

- Oplossing voor de stroom

$$i(t) = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} V_M \cos \omega t + \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} V_M \sin \omega t$$

# Nog een beetje doorrekenen

$$A \cos \varphi = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} V_M$$

$$A \sin \varphi = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} V_M$$



$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\omega L}{R}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$$



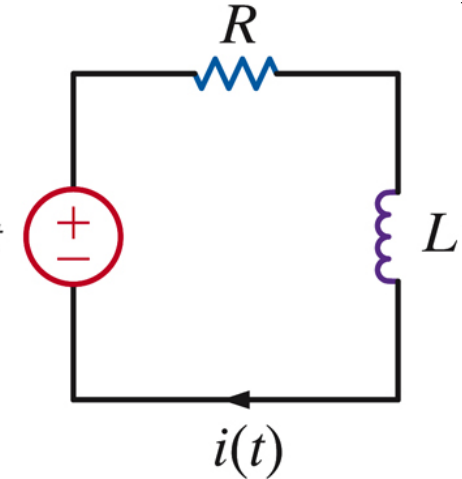
$$A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi = A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2$$

$$A^2 = \frac{R^2}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} V_M^2 + \frac{(\omega L)^2}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} V_M^2$$

$$A = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

$$v(t) = V_M \cos \omega t$$



- Dit is een hoop rekenwerk voor een ongelooflijk simpel circuit
- Als we dit via complexe versies van de goniometrische functies wordt het een pak simpeler!



$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\operatorname{Re}(e^{j\omega t}) = \cos \omega t \quad \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) = \sin \omega t$$

- We leggen een complexe exponentiële bron aan

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} = V_M \cos \omega t + j V_M \sin \omega t$$

- We krijgen een complexe exponentieel als stroom

$$i(t) = I_M e^{j\omega t} = I_M \cos(\omega t + \varphi) + j I_M \sin(\omega t + \varphi)$$

## Superpositie

We beschouwen  $v(t)$  als de som van twee bronnen:  
een imaginaire en een reële

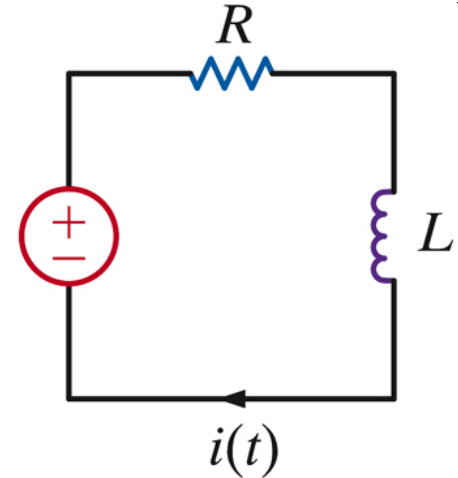
# Nog eens proberen



$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M e^{j\omega t}$$

■ invullen  $i(t) = I_M e^{(j\omega t + j\varphi)}$

$$v(t) = V_M e^{j\omega t}$$

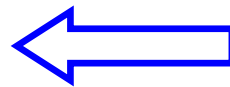


$$RI_M e^{(j\omega t + j\varphi)} + j\omega L \cdot I_M e^{(j\omega t + j\varphi)} = V_M e^{j\omega t}$$

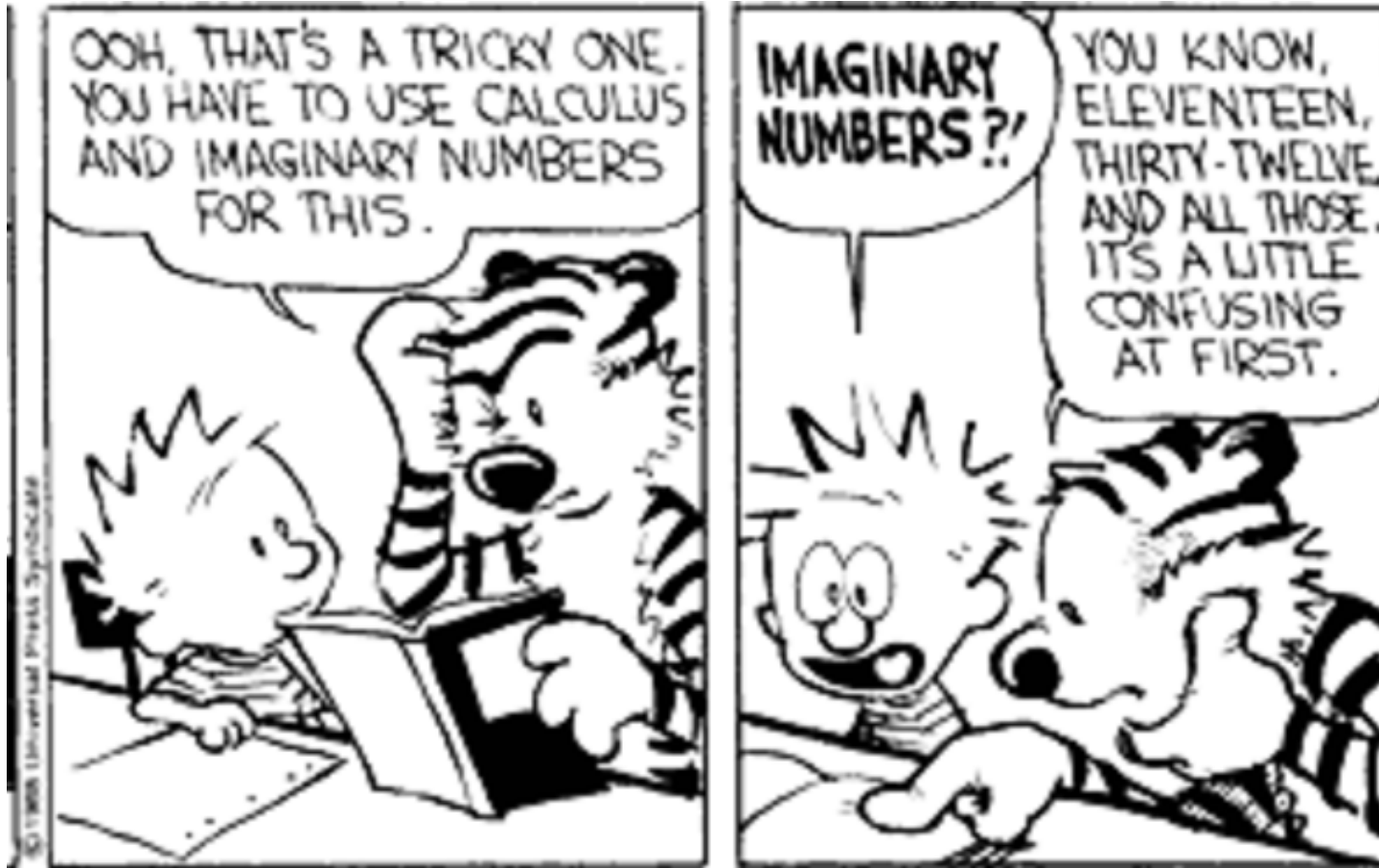
$$RI_M e^{j\varphi} + j\omega L \cdot I_M e^{j\varphi} = V_M$$



$$I_M e^{j\varphi} = \frac{V_M}{R + j\omega L}$$



- Frequentie afhankelijke term 'de sinusoiden zelf' valt eruit!
- We kunnen gewoon doorrekenen met fase en amplitude
- Gewone, lineaire vergelijking



Als je een sinusoidale met een gegeven frequentie aanlegt aan een lineair circuit, dan is de responsie ook een sinusoidale met dezelfde frequentie maar met een andere amplitude en fase

Sinusoides zijn “eigenfuncties” van een lineair systeem

- Omzetten naar polaire vorm

$$I_M e^{j\varphi} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j \left( -\tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \right)} \quad \varphi$$

A

- Reëel deel nemen en frequentie terug toevoegen

$$i(t) = I_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos \left( \omega t - \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \right)$$

YES!

- Vereenvoudigde schrijfwijze voor complexe getallen

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t + j\phi})$$

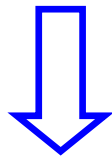
$$v(t) = \operatorname{Re}(V_M \angle \theta \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\mathbf{V}_M e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{V}_M e^{j\omega t})$$

- Verschillende notaties voor fazor (bold is vervelend voor handschrift!)
- We gaan nu gewoon rekenen met fazoren.
  - Fazor = ‘complexe sinusoidale zonder de pulsatie’
- Hierbij ‘vergeten’ we de frequentie.
  - Als we  $\omega$  aanleggen krijgen we ook  $\omega$  in de andere spanningen en stromen.
  - De faze en de amplitude verandert wel

# Fazor verband voor weerstand

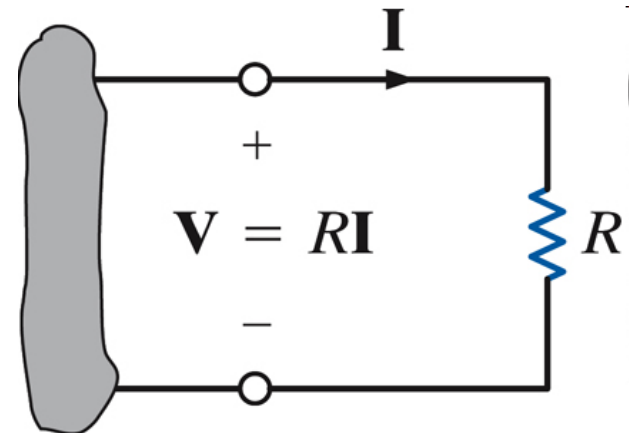
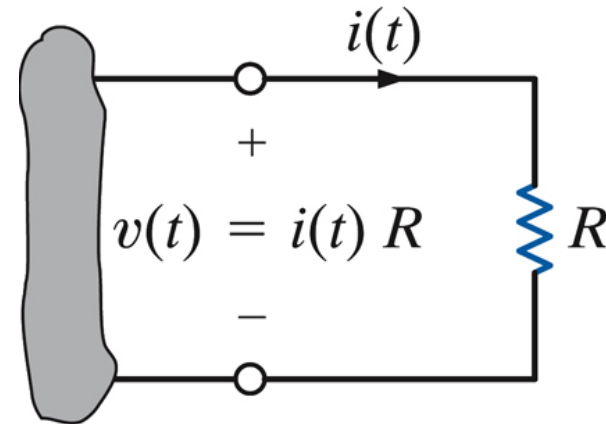
$$v(t) = Ri(t)$$

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_V)} = RI_M e^{j(\omega t + \theta_I)}$$

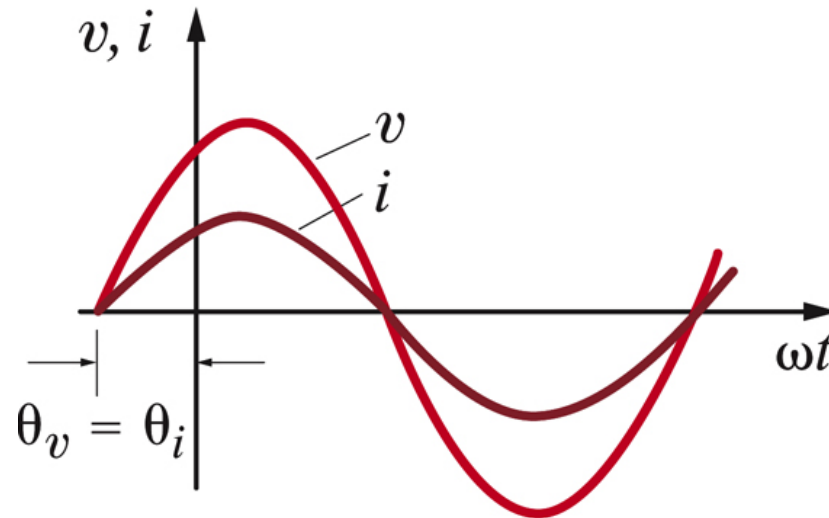
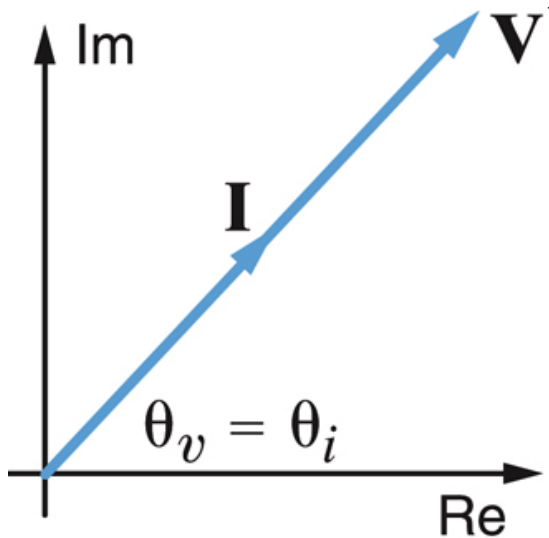


$$V_M = RI_M \quad \theta_I = \theta_V$$

Spanning over een  
weerstand en de stroom  
erdoor zijn in fase



- Fazoren kunnen voorgesteld worden als (draaiende) vectoren



Voor fazor demo

<http://ptolemy.eecs.berkeley.edu/eecs20/berkeley/phasors/demo/phasors.html>

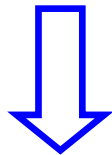


# Fazor verband voor spoel

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

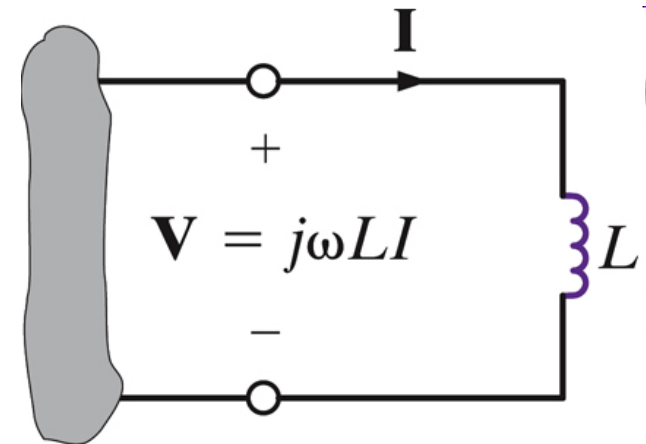
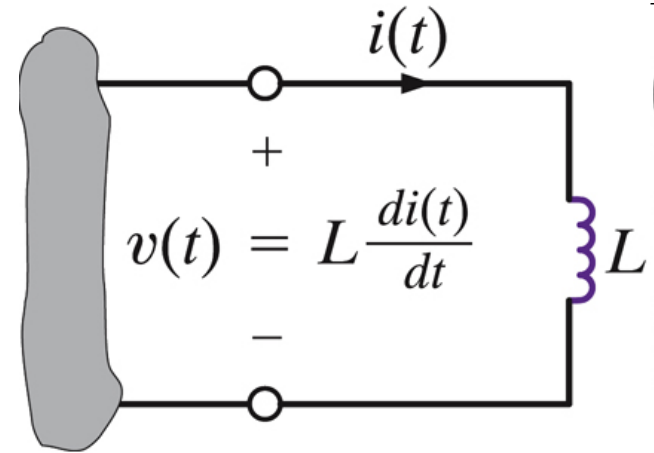
$$V_M e^{j(\omega t + \theta_V)} = L \frac{d(I_M e^{j(\omega t + \theta_I)})}{dt}$$

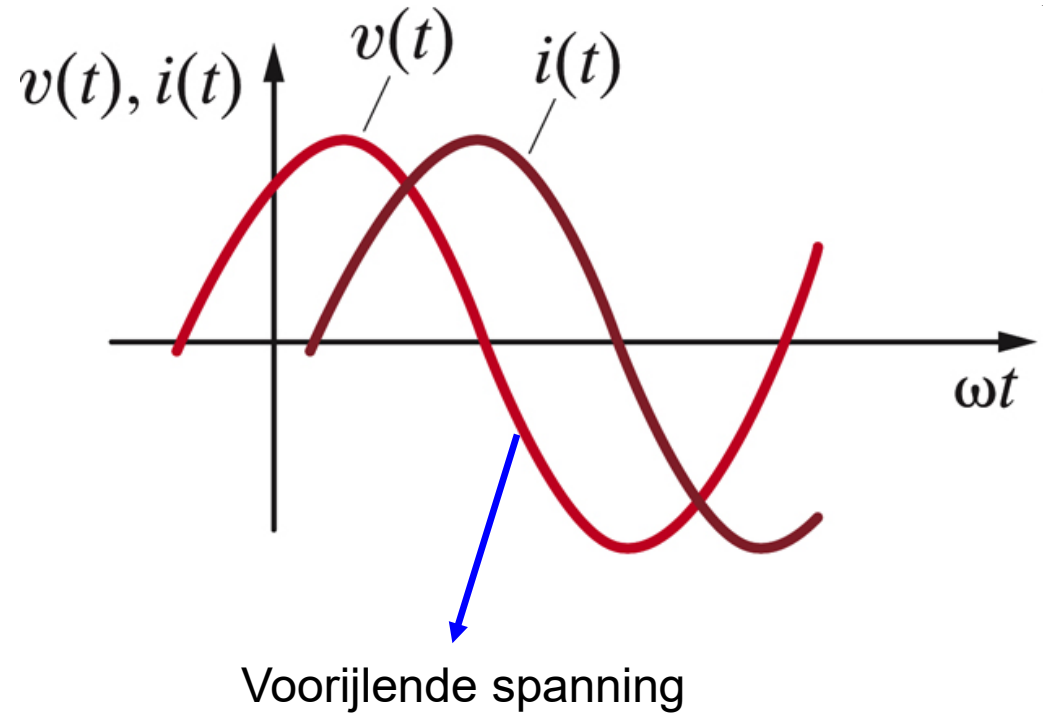
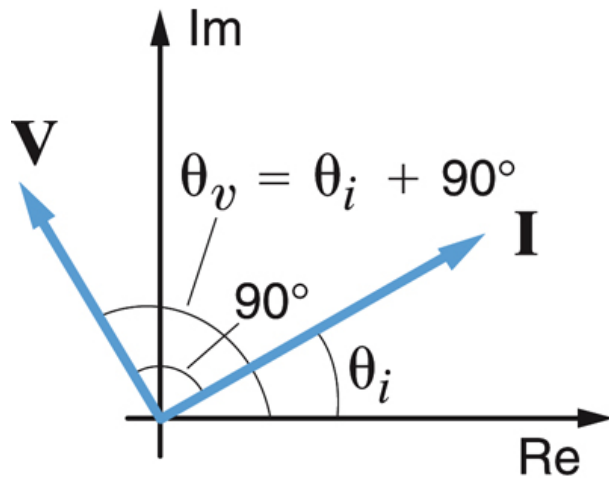
$$V_M e^{j\theta_V} = j\omega L \cdot I_M e^{j\theta_I}$$



$$V_M = \omega L \cdot I_M \quad \theta_V = \theta_I + \frac{\pi}{2}$$

Spanning over een spoel ijlt 90° voor op de stroom erdoor



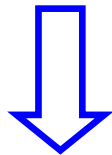


# Fazor verband voor condensator

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

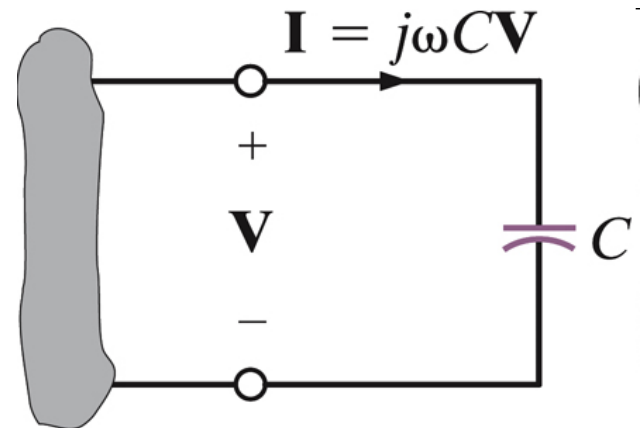
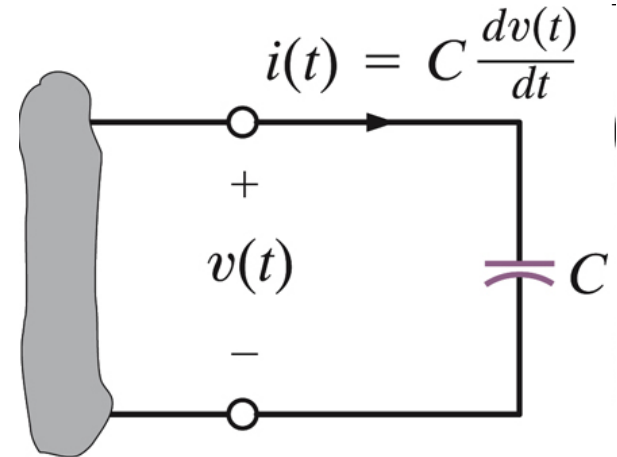
$$I_M e^{j(\omega t + \theta_I)} = C \frac{d(V_M e^{j(\omega t + \theta_V)})}{dt}$$

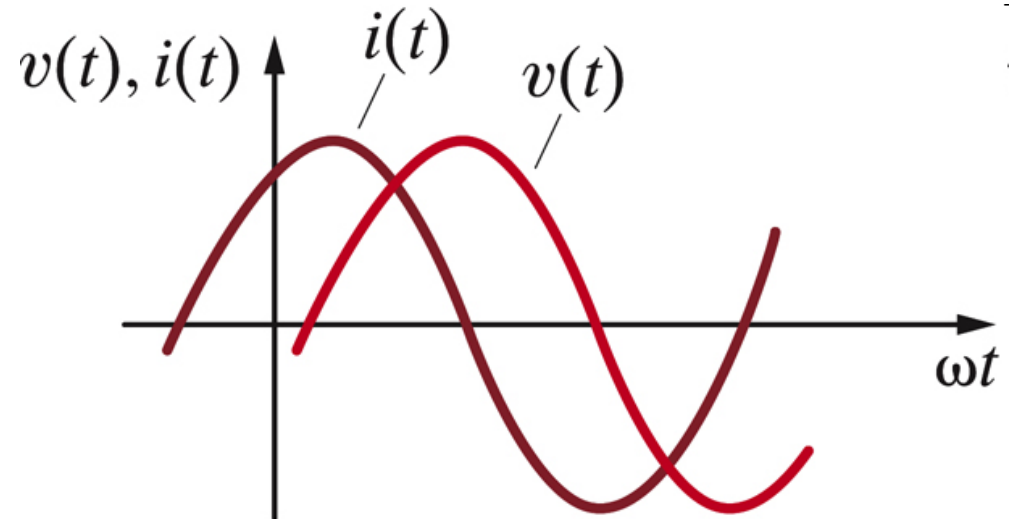
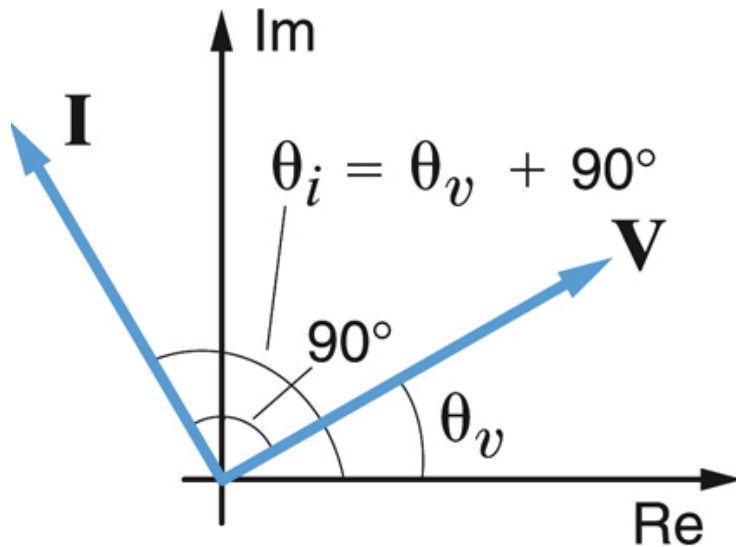
$$I_M e^{j\theta_I} = j\omega C \cdot V_M e^{j\theta_V}$$



$$I_M = \omega C \cdot V_M \quad \theta_I = \theta_V + \frac{\pi}{2}$$

Stroom door een condensator ijlt  $90^\circ$  voor op de spanning erover





Voor wie dit graag bewegend ziet  
<http://www.circuit-magic.com/capacitor.htm>

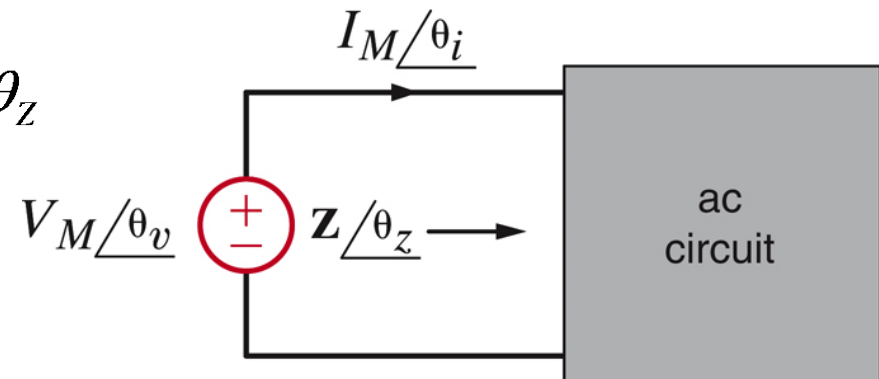
- Definitie

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

- Z is de impedantie
- R is de resistieve component, de weerstand
- X is de reactieve component, de reactantie

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{V_M \angle \theta_V}{I_M \angle \theta_I} = \frac{V_M}{I_M} \angle (\theta_V - \theta_I) = Z \angle \theta_Z$$

$$\hat{Z} = \frac{V_M e^{j\theta_V}}{I_M e^{j\theta_I}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\theta_V - \theta_I)} = Z e^{j\theta_Z}$$



Element	Impedantie
Weerstand R	$Z=R$
Condensator C	$Z=(j\omega C)^{-1}$
Spoel L	$Z=j\omega L$

- KCL en KVL gelden ook voor impedanties

- Serieschakeling:  $\hat{Z}_S = \sum \hat{Z}_i$

- Parallelschakeling:  $\frac{1}{\hat{Z}_P} = \sum \frac{1}{\hat{Z}_i}$

- Impedanties in serie bij 60 Hz

$$\hat{Z}_R = 25 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$= j(2\pi \cdot 60)(20 \cdot 10^{-3}) = j7.54 \Omega$$

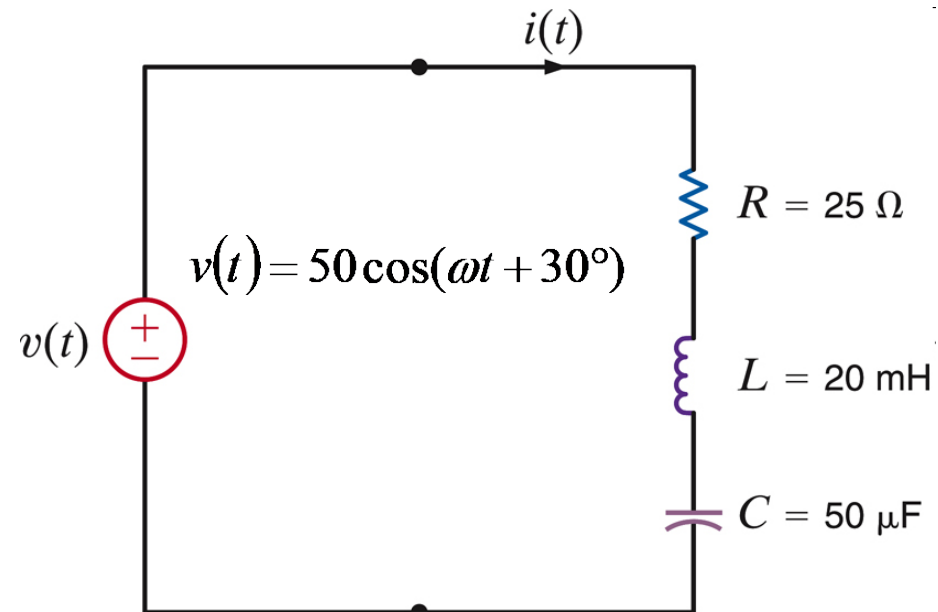
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$= \frac{-j}{(2\pi \cdot 60)(50 \cdot 10^{-6})} = -j53.05 \Omega$$

$$\hat{Z}_S = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C = 25 - j45.51 \Omega$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = \frac{50e^{j(\pi/6)}}{25 - j45.51} = \frac{50e^{j(\pi/6)}}{51.93e^{j1.0685}} = 0.96e^{j1.5921} A$$

Opmerking:  $f=60$  Hz is de frequentie van het laagspanningsnet (130V) in de US.



- Definitie

$$\hat{Y} = \frac{\hat{I}}{\hat{V}} = G(\omega) + jB(\omega)$$

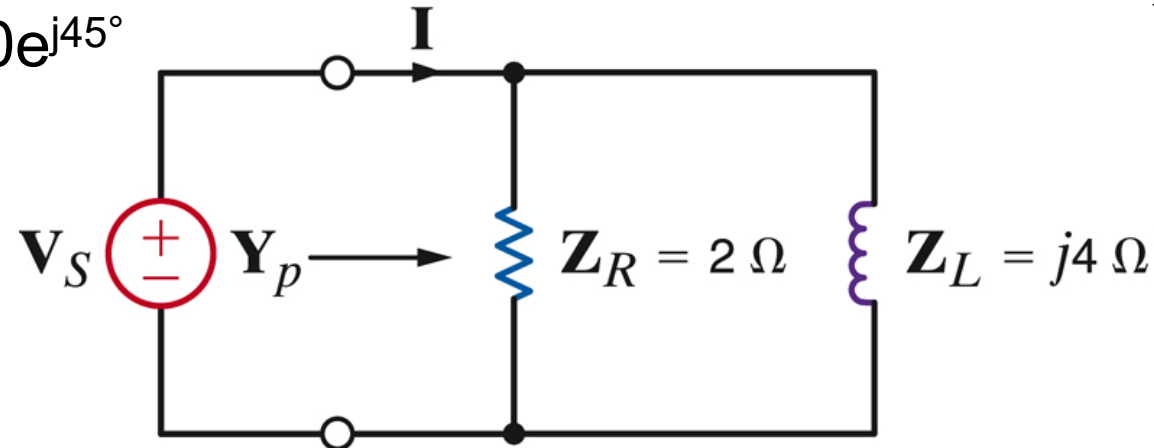
- Y is de admittantie
  - G is de conductantie
  - B is de susceptantie
- 
- En ook hier gelden de wetten van kirchoff, serie, parallel.
  - Er zijn allerlei verbanden te schrijven tussen Z,R,X en Y,G,B



- Bereken  $\mathbf{Y}_p$  en  $\mathbf{I}$ ,  $V_S = 60e^{j45^\circ}$

$$\hat{Y}_R = \frac{1}{\hat{Z}_R} = \frac{1}{2} S$$

$$\hat{Y}_L = \frac{1}{\hat{Z}_L} = \frac{-j}{4} S$$

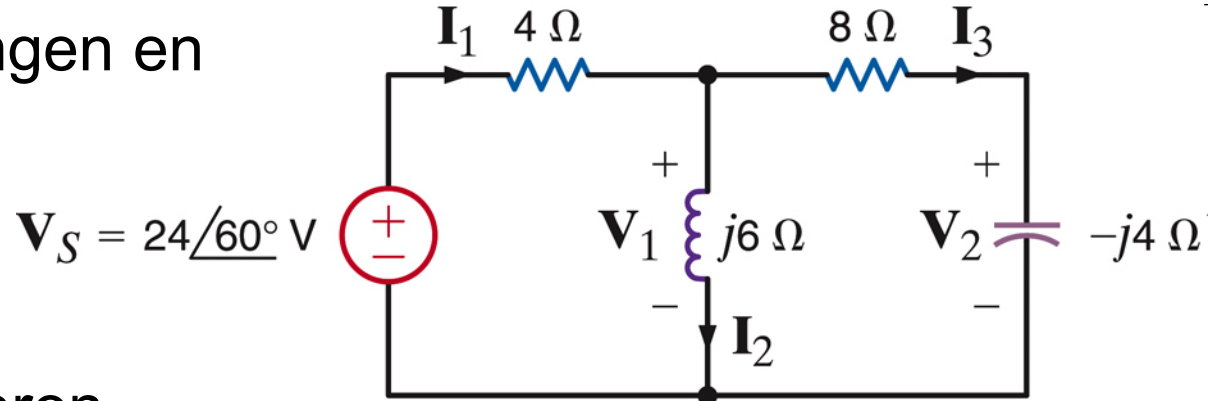


$$\hat{Y}_p = \hat{Y}_R + \hat{Y}_L = \left( \frac{1}{2} - j\frac{1}{4} \right) S = 0.559e^{-j26.57^\circ}$$

$$\hat{I} = \hat{Y}_p \hat{V}_S = \left( 0.559e^{-j26.57^\circ} \right) \left( 60e^{j45^\circ} \right) = 33.5e^{j18.43^\circ} A$$

- Eigenlijk kunnen we nu voor sinusoidaal AC regime alles
  - Serie en parallel schakeling
  - Knooppunts- en lusanalyse
  - Superpositie
  - Thevenin & Norton
  
- We moeten wel met complexe getallen rekenen
  
- Er staan een hoop voorbeelden in het boek

- Bereken alle spanningen en stromen



- $Z_{eq}$  gezien door de bron

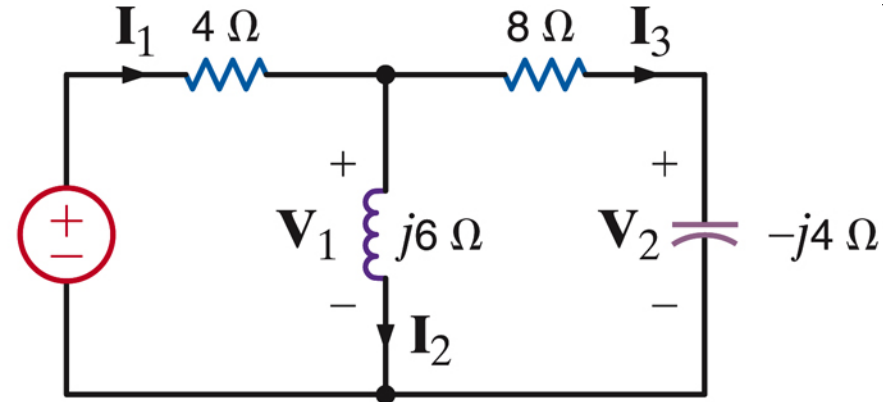
$$\hat{Z}_{eq} = 4 + [(j6) \parallel (8 - j4)] = 4 + \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4}$$

$$\hat{Z}_{eq} = 4 + \frac{24 + j48}{8 + j2} = 8.24 + j4.49 = 9.61 \angle 30.94^\circ$$

- Stromen en spanningen

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{V}_S}{\hat{Z}_{eq}} = \frac{24 \angle 60^\circ}{9.61 \angle 30.94^\circ} \quad \mathbf{V}_S = 24 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$= 2.5 \angle 29.06^\circ \text{ A} \quad \text{Ohm}$$



$$\hat{V}_1 = \frac{8 + j2}{24 + j48 + 4} \hat{V}_S = 16.26 \angle 78.24^\circ \text{ V}$$

**Spanningsdeler**

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{V}_1}{j6} = 2.71 \angle -11.58^\circ \text{ A}$$

**Ohm**

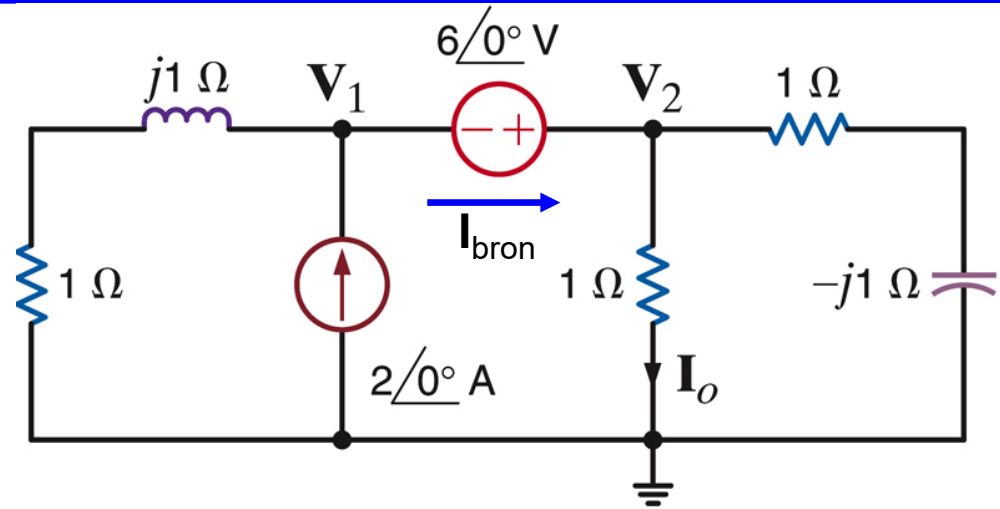
$$\hat{I}_3 = \frac{\hat{V}_1}{8 - j4} = 1.82 \angle 105^\circ \text{ A}$$

**Ohm**

$$\hat{V}_2 = \hat{I}_3 (-j4) = 7.28 \angle 15^\circ \text{ V}$$

**Ohm**

- Bereken  $I_0$
- Knooppuntsanalyse
  - (1) KCL op knoop 1
  - (2) KCL op knoop 2
  - (3) KVL voor V-bron
  - (kan ook met superknoop)



$$\frac{\hat{V}_1}{1+j} - 2 + \hat{I}_{bron} = 0 \quad (1)$$

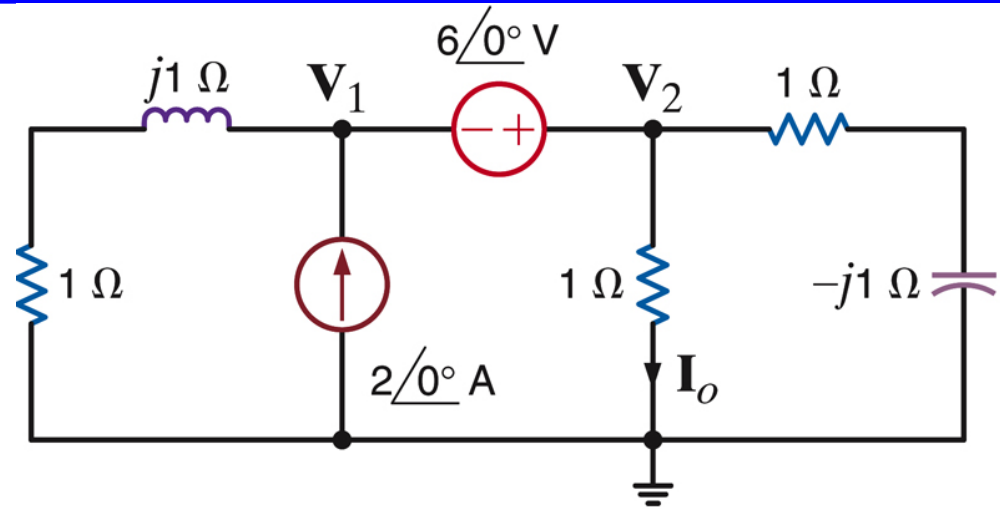
$$\frac{\hat{V}_2}{1-j} + \frac{\hat{V}_2}{1} - \hat{I}_{bron} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{V}_1 + 6 = \hat{V}_2 \quad (3)$$

$$\frac{\hat{V}_1}{1+j} - 2 + \hat{I}_{bron} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\hat{V}_2}{1-j} + \hat{V}_2 - \hat{I}_{bron} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{V}_1 + 6 = \hat{V}_2 \quad (3)$$



- (3) in (1) en (2)

$$\frac{\hat{V}_2 - 6}{1+j} - 2 + \hat{I}_{bron} = 0 \quad (1')$$

$$\frac{\hat{V}_2}{1-j} + \hat{V}_2 - \hat{I}_{bron} = 0 \quad (2)$$

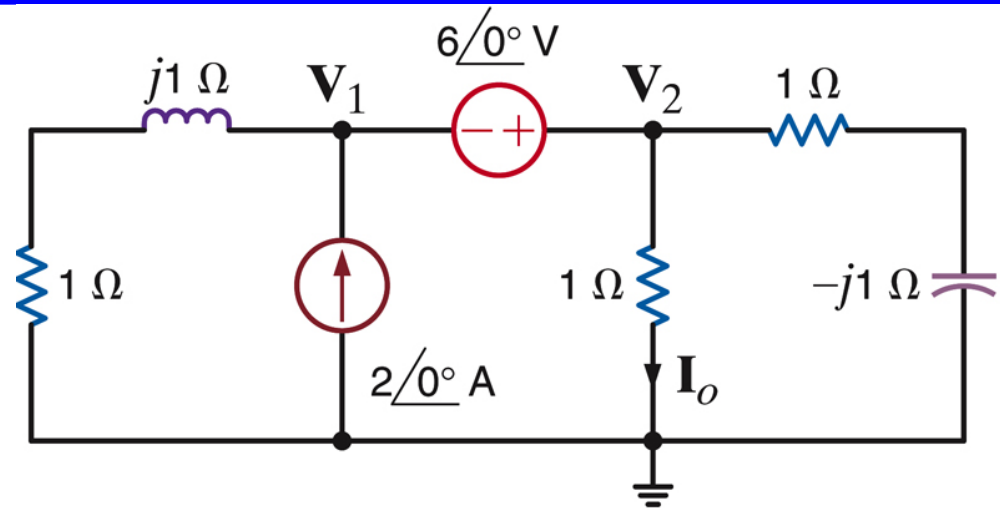
- (1')+(2)

$$\frac{\hat{V}_2 - 6}{1+j} - 2 + \frac{\hat{V}_2}{1-j} + \hat{V}_2 = 0$$

- Oplossen naar  $\mathbf{V}_2$

$$\hat{V}_2 = \frac{4+j}{1+j} = \left( \frac{5}{2} - j\frac{3}{2} \right) \text{V}$$

$$\hat{V}_2 = \frac{4 + j}{1 + j} = \left( \frac{5}{2} - j\frac{3}{2} \right) \text{V}$$

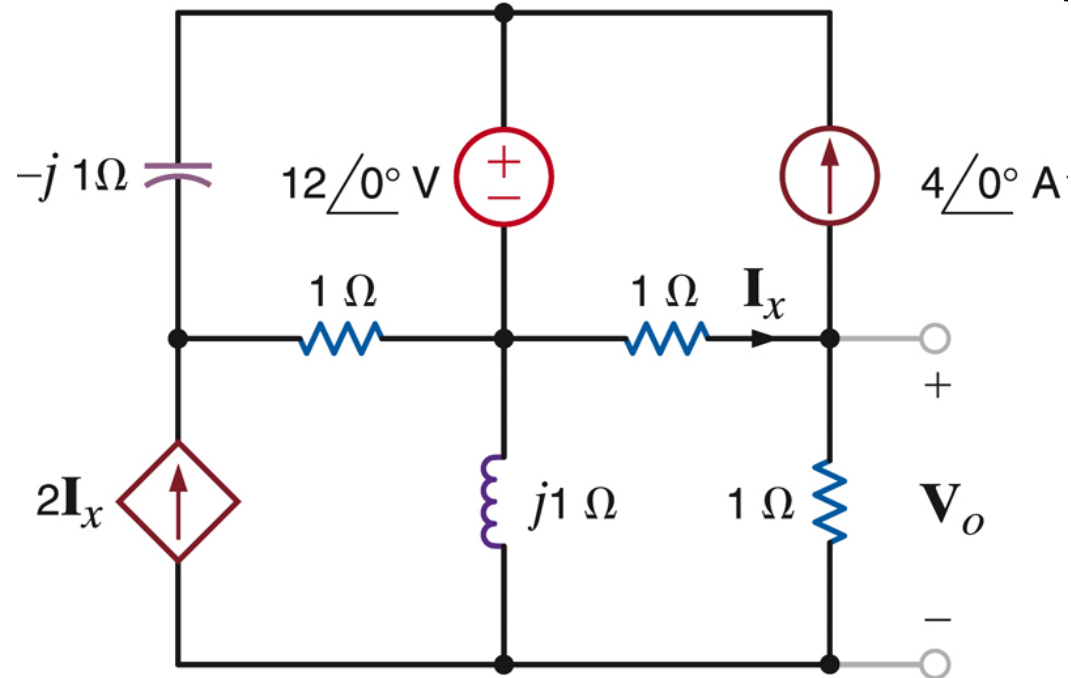


- Bereken  $I_0$

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{V}_2}{1} = \left( \frac{5}{2} - j\frac{3}{2} \right) \text{A}$$

- In boek ook met
  - Knooppuntsanalyse/superknoop
  - Lus analyse
  - Bronnen wisselen
  - Thevenin
  - Norton

- Bereken  $V_o$  met thevenin
  - Open klem spanning
  - Impedantie met  $V_{\text{test}}$
  - (kan ook met  $I_{\text{SC}}$  / Norton)





# Thevenin – Open klem spanning

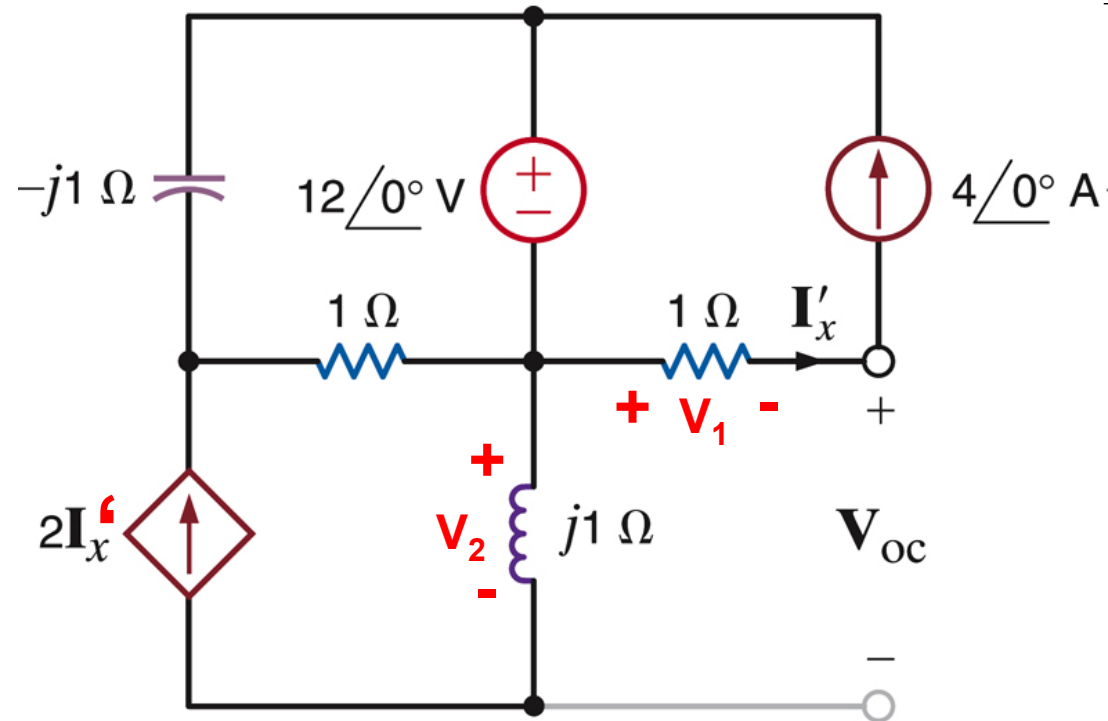
- Bereken  $V_{oc}$

$$\hat{I}'_x = 4$$

Door spoel loopt  $2\hat{I}'_x = 8$

$$\hat{V}_{oc} = -\hat{V}_1 + \hat{V}_2$$

$$\begin{aligned}\hat{V}_{oc} &= -1 \cdot \hat{I}'_x + j2\hat{I}'_x \\ &= -4 + j8\end{aligned}$$

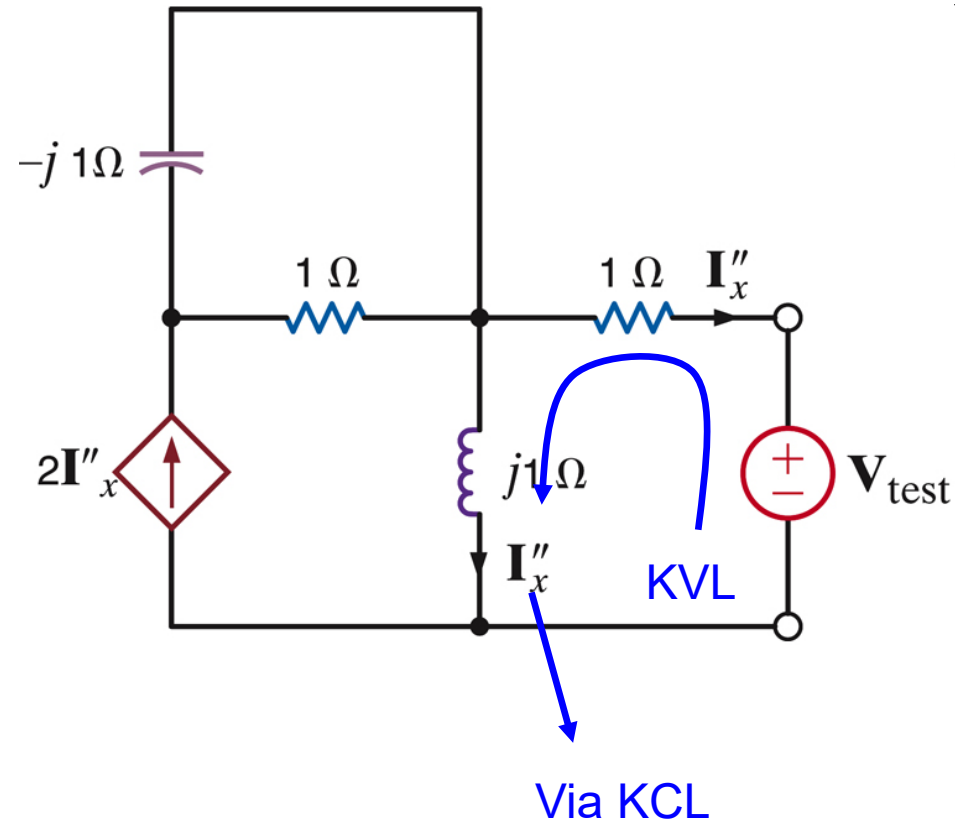


- Bereken  $Z_{TH} = V_{test} / -I''_x$
- $I''_x$  via KVL in maas met  $V_{test}$

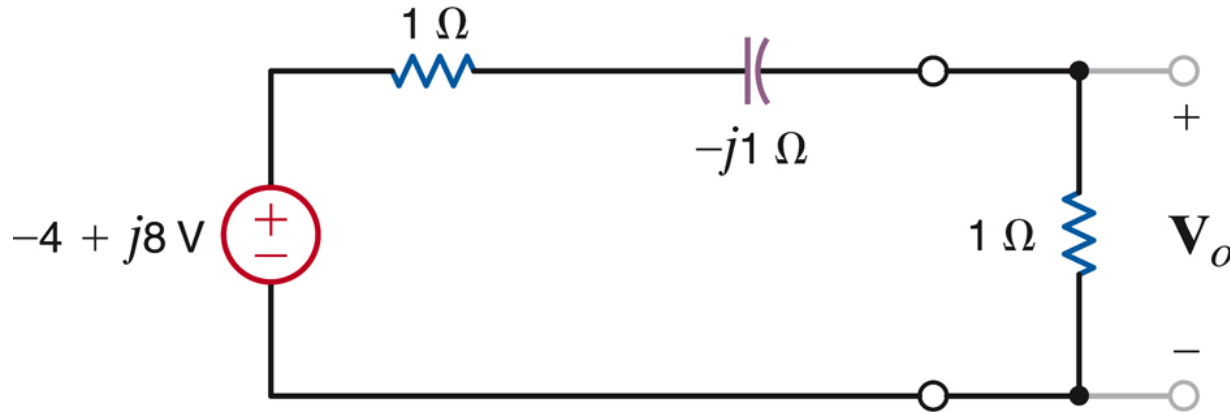
$$j\hat{I}''_x - \hat{I}''_x - V_{test} = 0$$

$$\hat{I}''_x = \frac{\hat{V}_{test}}{j-1}$$

$$\hat{Z}_{TH} = \frac{\hat{V}_{test}}{-\hat{I}''_x} = (1-j)\Omega$$



# Thevenin equivalent network



$$\hat{V}_0 = \frac{1}{1 + (1 - j)} (-4 + j8) = \frac{-4 + j8}{2 - j}$$

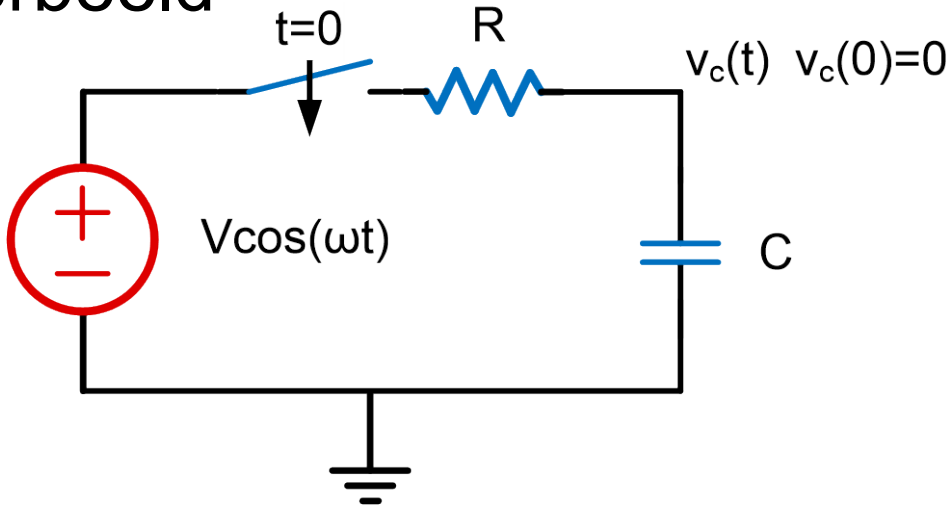
$$= \frac{1}{5} (12j - 16) = 4e^{j143.13^\circ}$$

**Conclusie:**  
**AC berekenen met R,L,C**  
**is zoals DC**  
**maar dan met fazoren**

# Wat met de beginvoorwaarden (I)

- De methode met de complexe impedantie geeft de regimetoestand
- Wiskundig gezegd: de particuliere oplossing
- Er is ook nog een overgangsverschijnsel zodat aan de beginvoorwaarde kan voldaan worden  $\rightarrow$  sterft uit als  $t \rightarrow \infty$
- Wiskundig gezegd: de oplossing van de homogene vergelijking

## ■ Voorbeeld

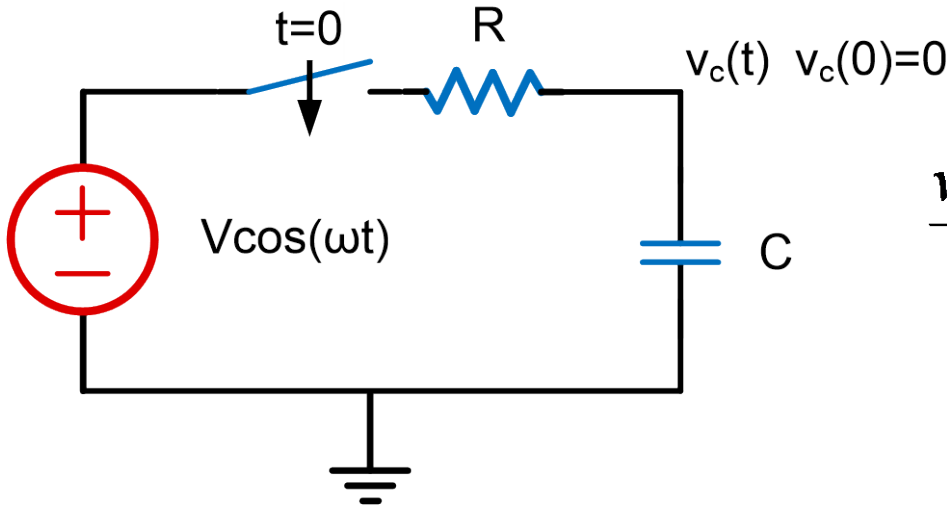


Differentiaalvergelijking (KCL)

$$\frac{v_c(t) - V \cos(\omega t)}{R} + C \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{v_c(t)}{R} + C \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = \frac{V \cos(\omega t)}{R}$$

# Wat met de beginvoorwaarden (III)



$$\frac{v_c(t)}{R} + C \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = \frac{V \cos(\omega t)}{R}$$

Particuliere oplossing

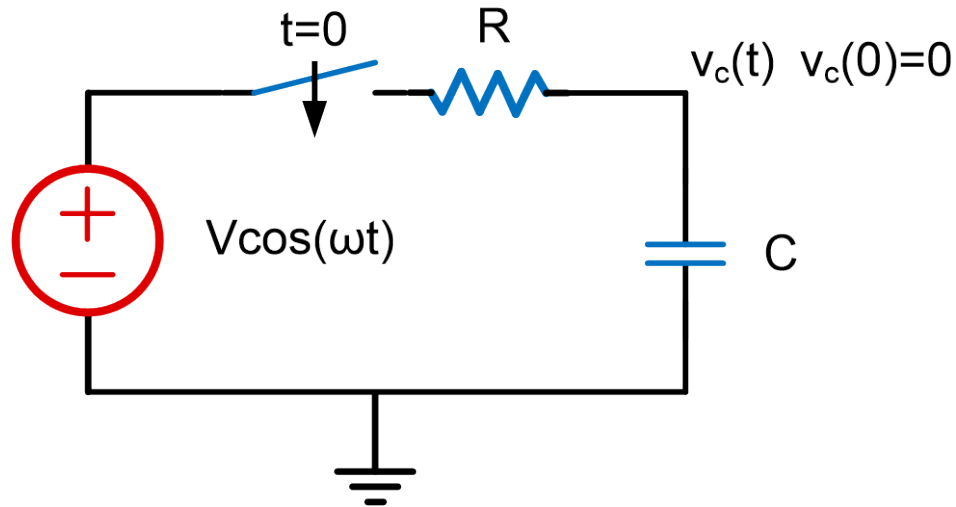
$$v_c(t) = \frac{V}{1 + (\omega RC)^2} (\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t))$$

Via directe oplossing diff. vergelijking of via complexe impedanties

Oplossing homogene vergelijking

$$v_c(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

# Wat met de beginvoorwaarden (IV)



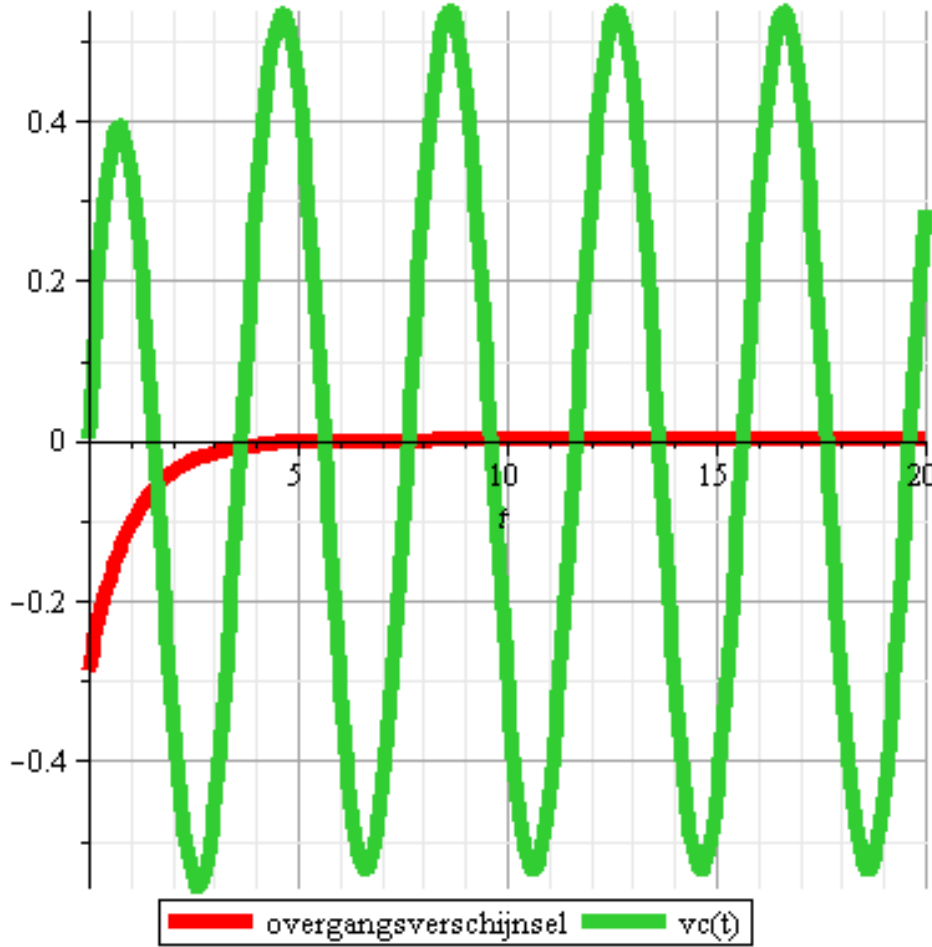
Totale oplossing

$$v_c(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V}{1 + (\omega RC)^2} (\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t))$$

K via beginvoorwaarde  $v_c(0)=0$

$$v_c(t) = \frac{-V}{1 + (\omega RC)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V}{1 + (\omega RC)^2} (\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t))$$

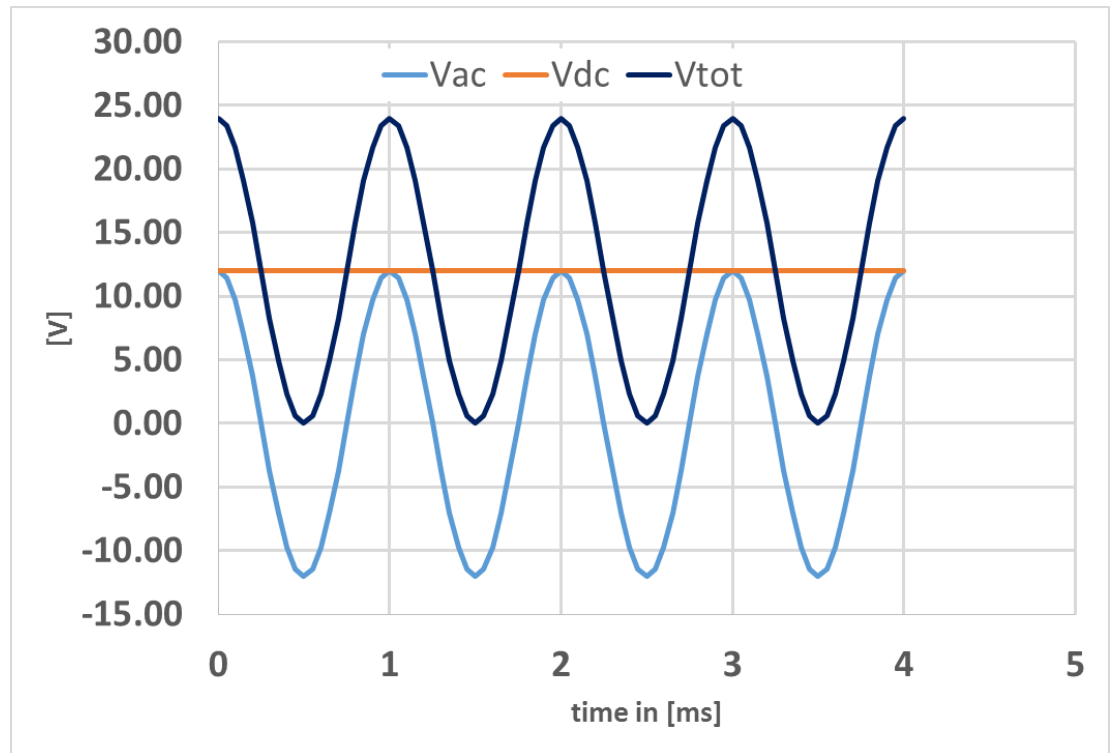
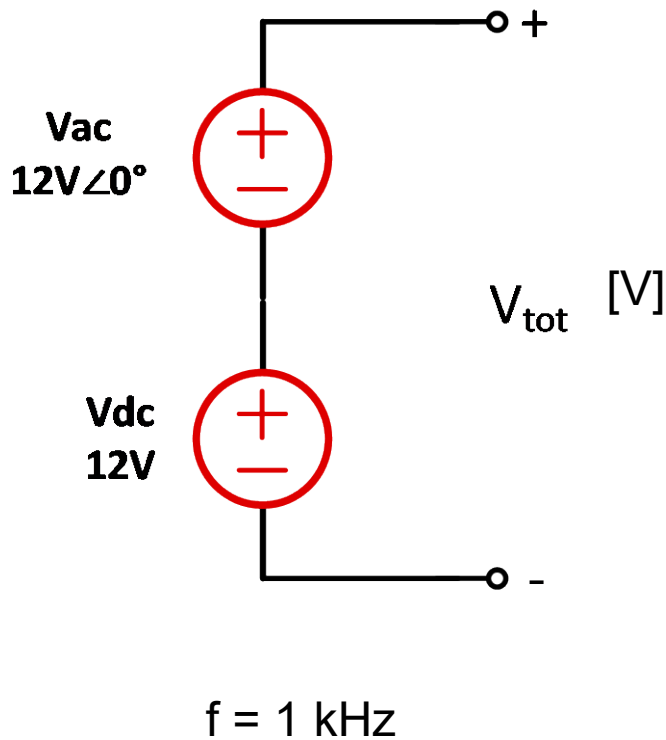
# Wat met de beginvoorwaarden (V)

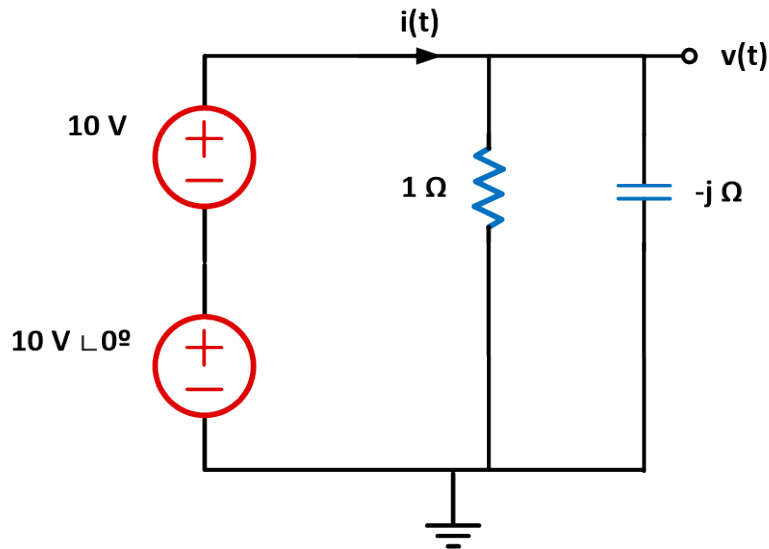


$$R=1, C=1, \omega= 2\pi/4, V=1$$



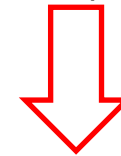
# Superpositie van AC en DC





Bereken  $i(t)$

Niet zomaar DC  
(reëel) en AC  
(complex) optellen !!



Via superpositie

$i_{DC}$ , C is open keten

$$i_{DC} = V_{DC} / R \\ = 10 / 1 = 10A$$

Fout op slides

$$I_{AC} \rightarrow i_{ac}(t)$$

$$I_{AC} = V_{AC} / (R // C)$$

$$= 10 / \left( \frac{-j}{1-j} \right)$$

$$= 10 + j10$$

$$i_{ac}(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$i(t) = i_{DC} + i_{AC}(t)$$

$$i(t) = 10 + 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)$$

- 8.1 Sinusoids
  - Gezien (elementair)
- 8.2 Sinusoidal en complex forcing function
  - Gezien (elementair)
- 8.3 Phasors
  - Gezien
- 8.4 Phasor relationships for circuit elements
  - Gezien
- 8.5 Impedance and Admittance
  - Gezien
- 8.6 Phasor diagrams
  - Niet gezien
- 8.7 Basic Analysis using Kirchoff's laws
  - Gezien
- 8.8 Analysis techniques
  - Gezien
- 8.9 AC pspice analysis using schematic capture
  - Niet gezien
- 8.10 & 8.11 Application/Design examples
  - Voorbeelden



# H01Z2

## Elektrische netwerken

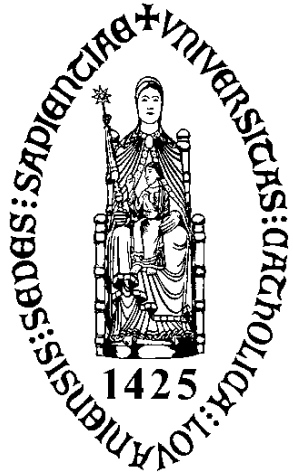
### Hoofdstuk 9 en 11

### AC vermogen

W. Dehaene

---

- Deze slides komen later op toledo



# H01Z2

## Elektrische netwerken

### Hoofdstuk 12

### AC analyse met variabele frequentie

W. Dehaene

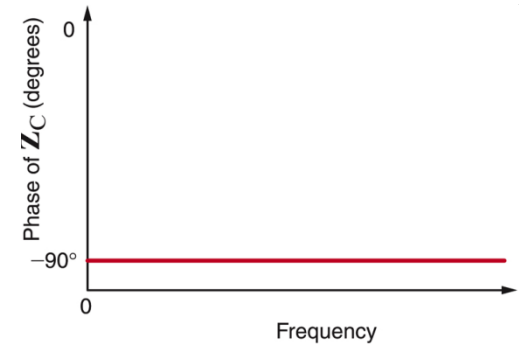
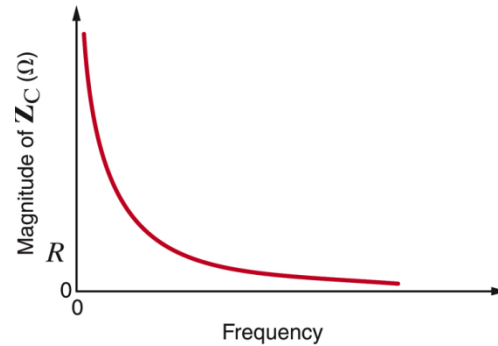
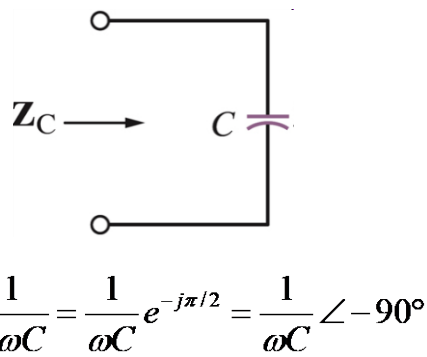
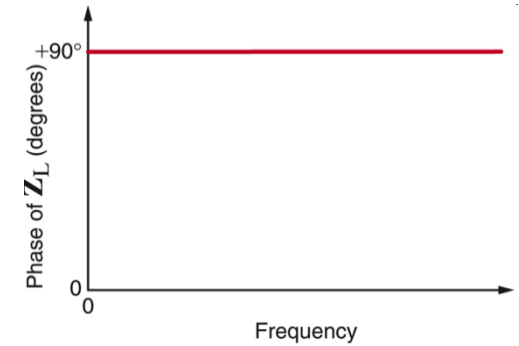
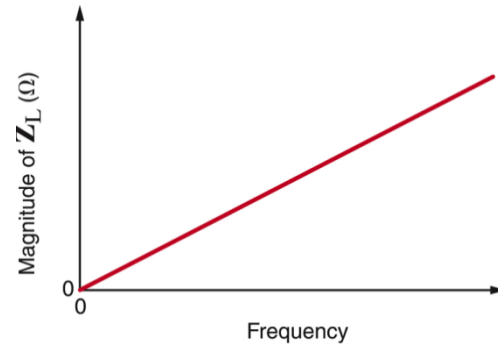
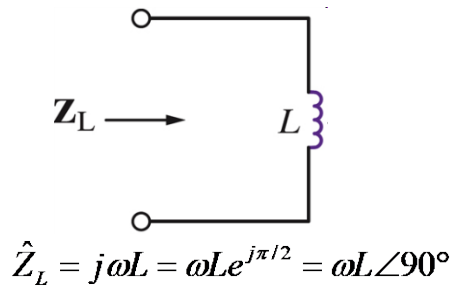
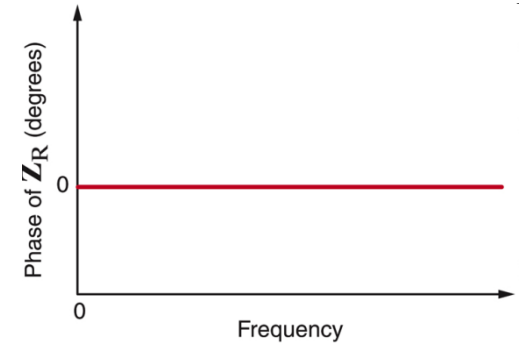
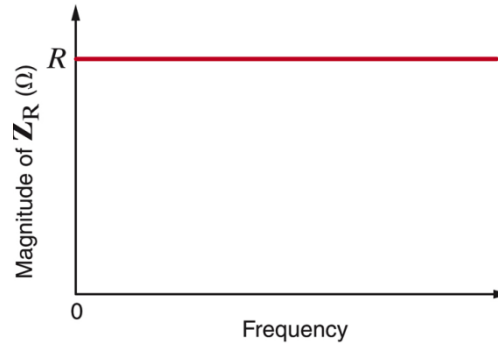
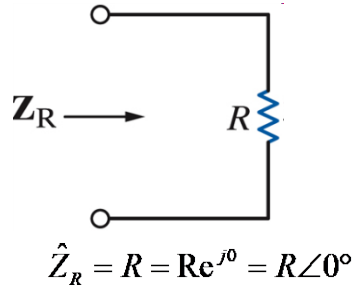
---

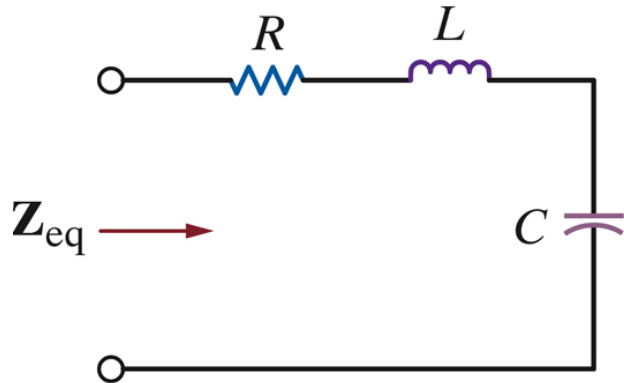
- Basisbegrippen
- Bode plots
- Resonantie
- Filters

- Tot nu toe werkten we altijd met een vaste frequentie
- Vanaf nu is de frequentie ook een variabele!
- We blijven wel nog uitgaan van sinusoidale of constante bronnen



# Impedantie en frequentie voor R,L,C

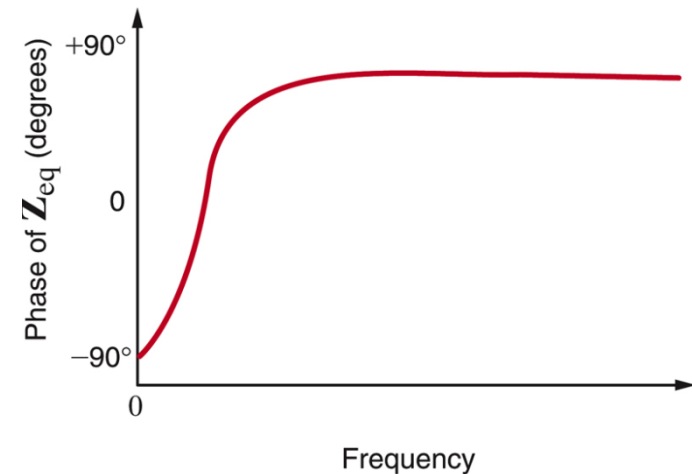
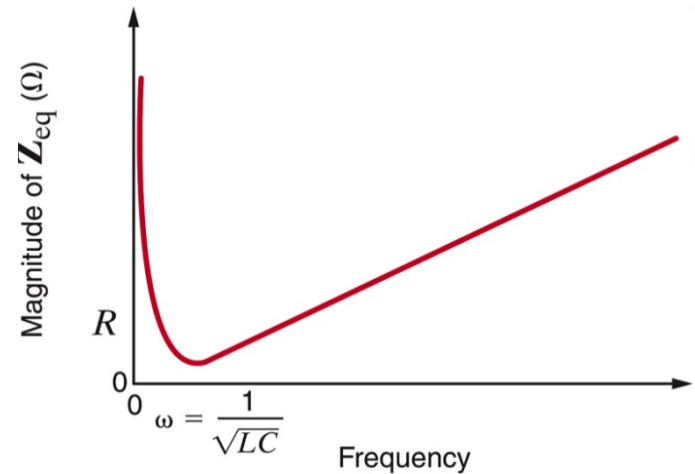




$$Z_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= \frac{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}{j\omega C}$$

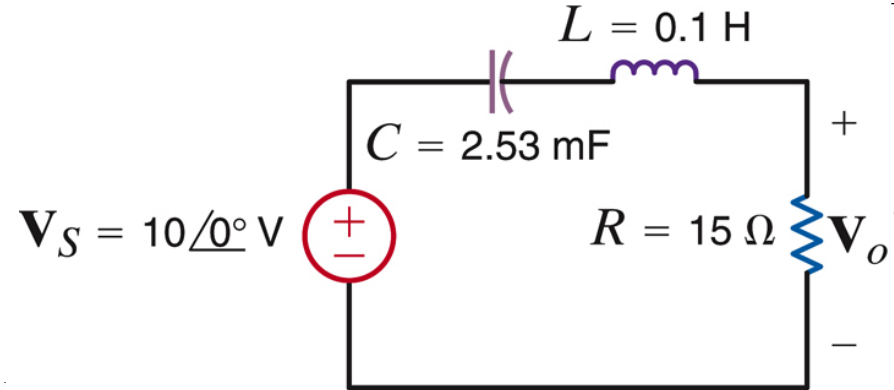
- Z is capacitief bij lage frequenties (spoel sluit kort)
- Z is inductief bij hoge frequenties (cap sluit kort)



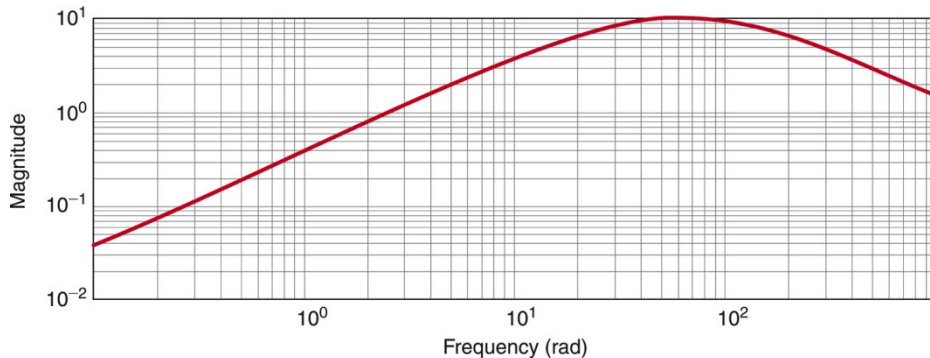
# Wat gebeurt er met de spanning?

- Bereken  $V_o = f(\omega)$

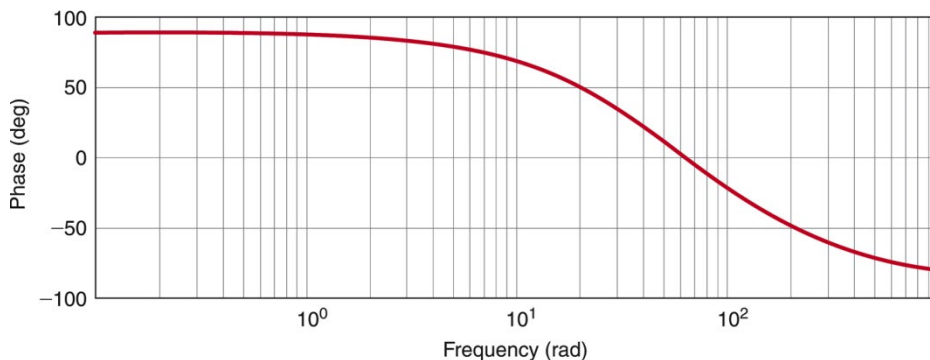
$$\hat{V}_o = \left( \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right) \hat{V}_s = \left( \frac{j\omega CR}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \right) \hat{V}_s$$



- Getallen invullen ...



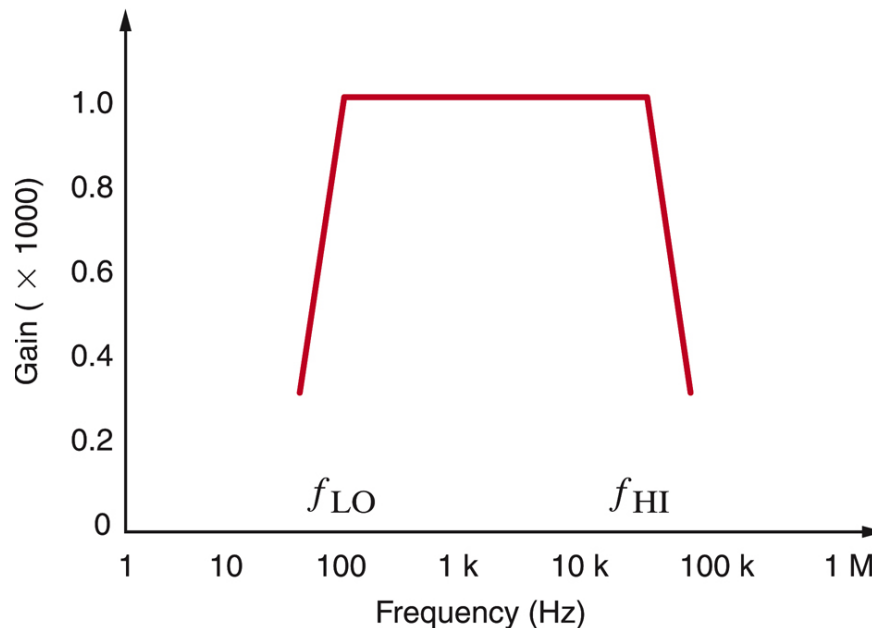
Log-log plot



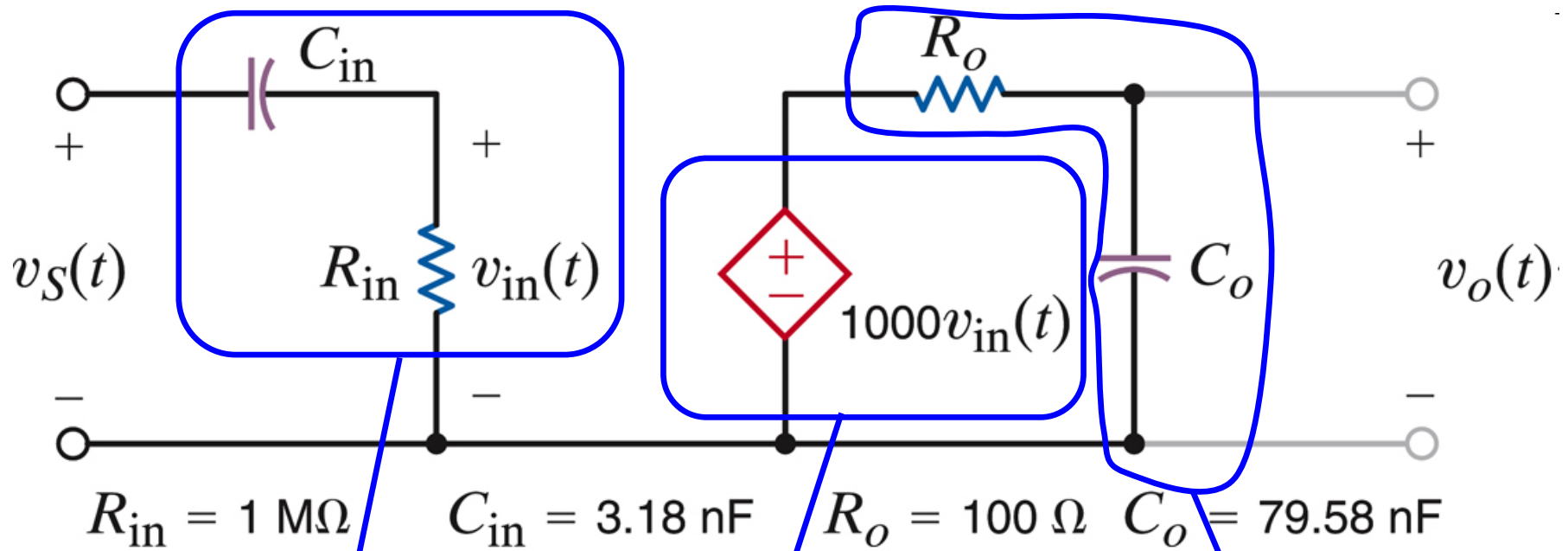
Semi-log plot

# Nog een voorbeeld: audioversterker

- We willen een geluidsversterker maken
  - enkel hoorbare frequenties versterken: 50 Hz tot 20 kHz.
  - In die band versterking 1000. Versterking (gain) is  $V_{\text{uit}}/V_{\text{in}}$
  - Dit is bv. een voorversterker voor een microfoon.
- Grafisch ziet de versterkingspecificatie er zo uit



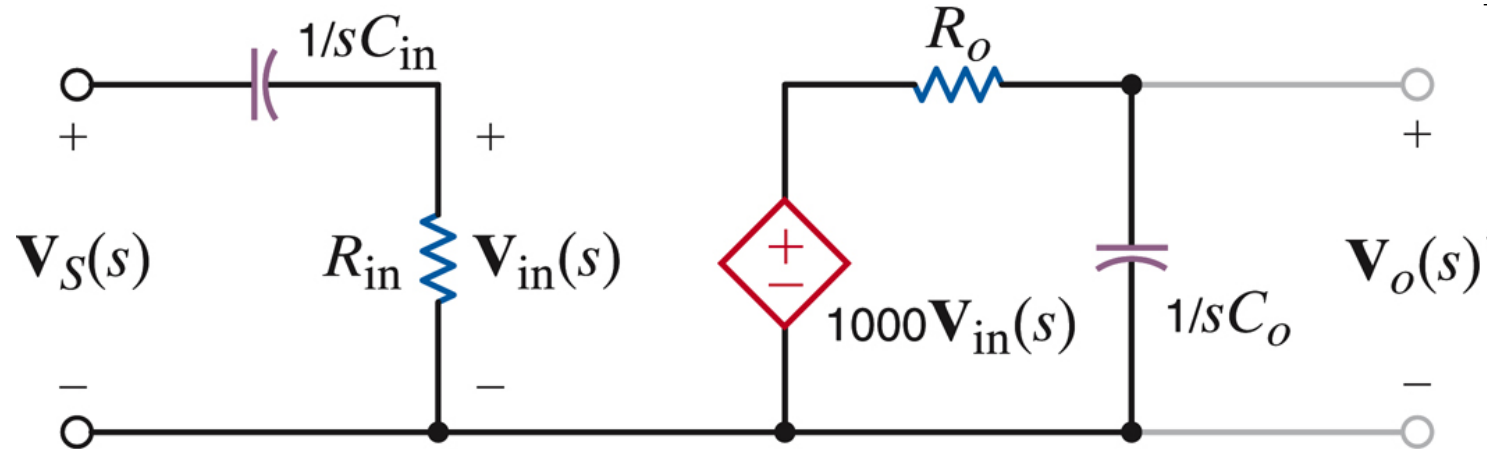
# Model van de versterker (I)



C laat hoge frequenties door in stroom  
 "hoogdoorlaat"

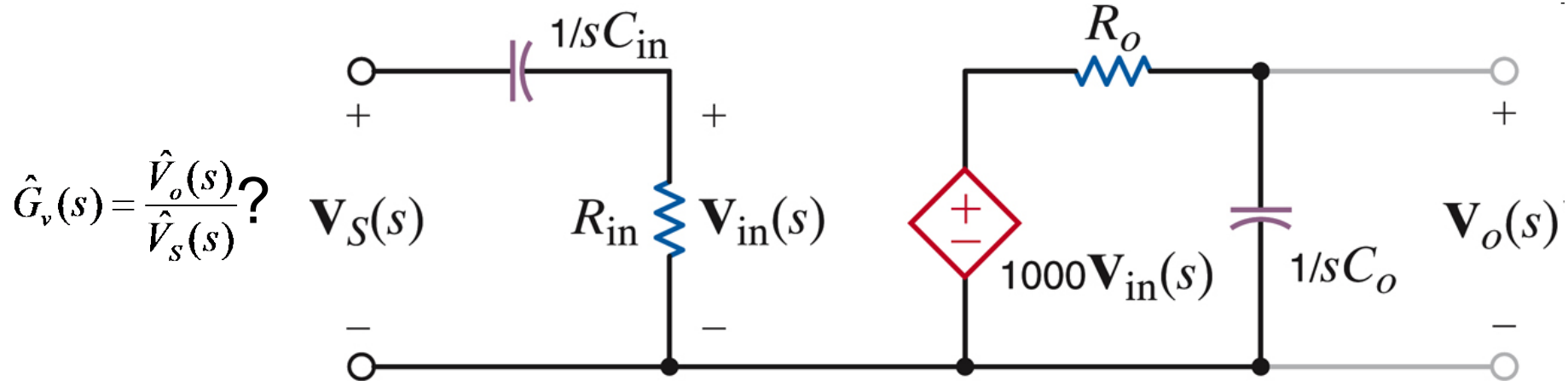
VDV Versterkt x1000  
 $\neq f(\omega)$

C sluit hoge frequenties kort  
 in spanning "laagdoorlaat"



- Frequentiedomein model
  - Veeltermen in 'j $\omega$ ' zijn het meest praktisch mee te werken ...
  - s is kort voor 'j $\omega$ '
  - (s zal later blijken de laplace variabele te zijn)
- We zoeken nu de versterking  $\mathbf{G}_v$

$$\hat{G}_v(j\omega) = \frac{\hat{V}_o(j\omega)}{\hat{V}_s(j\omega)} \qquad \hat{G}_v(s) = \frac{\hat{V}_o(s)}{\hat{V}_s(s)}$$

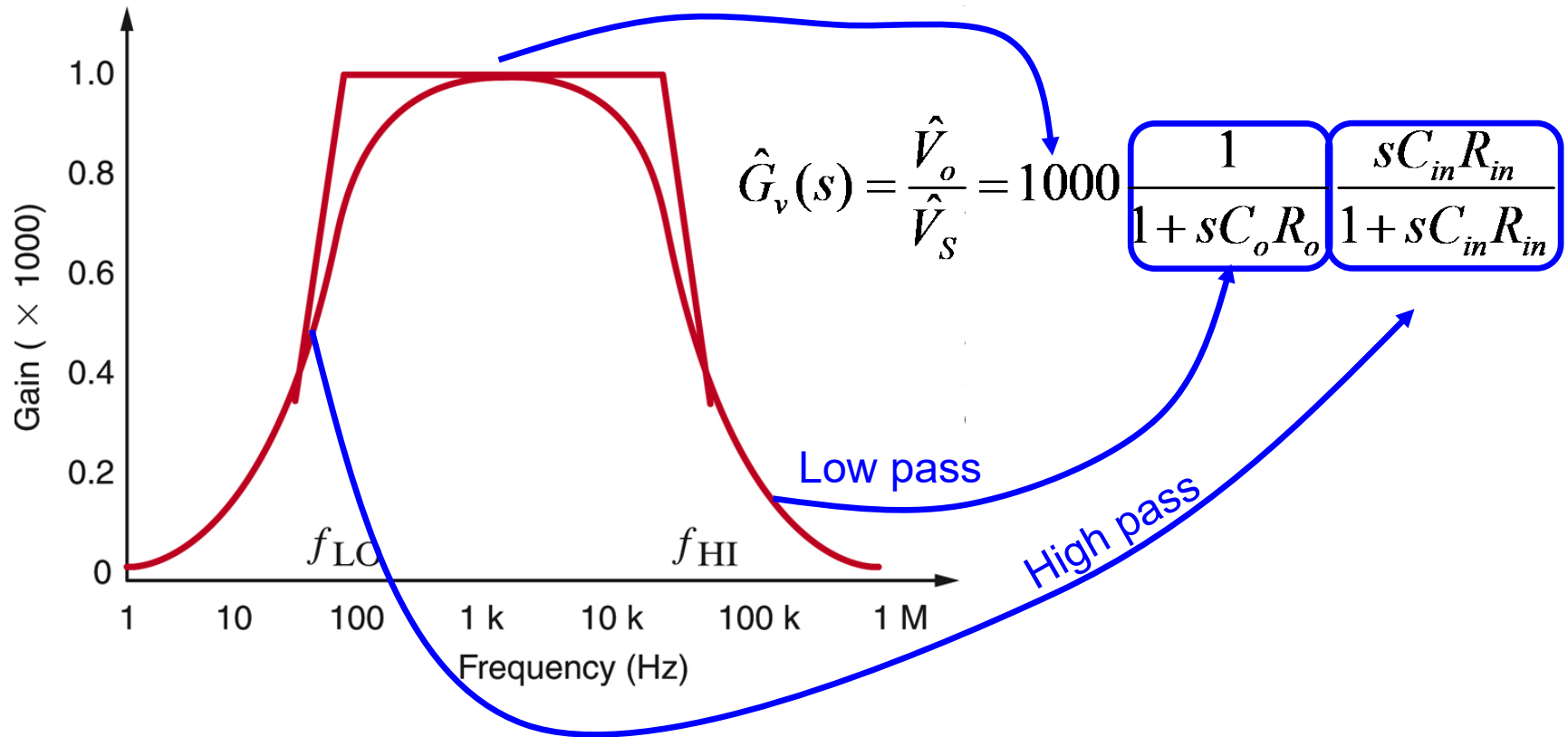


$$\hat{V}_{in} = \frac{R_{in}}{R_{in} + 1/(sC_{in})} \hat{V}_s = \frac{sC_{in}R_{in}}{1 + sC_{in}R_{in}} \hat{V}_s$$

$$\hat{V}_o = \frac{1/(sC_o)}{R_o + 1/(sC_o)} 1000\hat{V}_{in} = \frac{1}{1 + sC_oR_o} 1000\hat{V}_{in}$$

$$\hat{V}_o = 1000 \frac{1}{1 + sC_oR_o} \frac{sC_{in}R_{in}}{1 + sC_{in}R_{in}} \hat{V}_s$$

$$\hat{G}_v(s) = \frac{\hat{V}_o}{\hat{V}_s} = 1000 \frac{1}{1 + sC_oR_o} \frac{sC_{in}R_{in}}{1 + sC_{in}R_{in}}$$



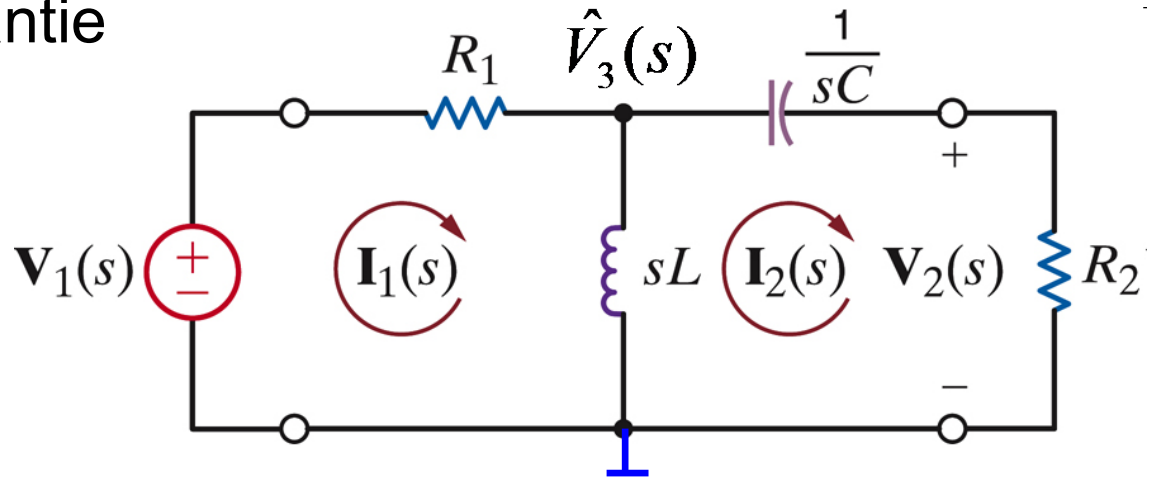
- We hebben dus een frequentie afhankelijke versterking
- De 'roll-off' gebeurt wat zachter: 20 dB/decade voor 1<sup>e</sup> orde



- Transferfunctie  $H(s)$ : geeft de verhouding tussen een responsie en de bijhorende input, als functie van de frequentie
- = netwerk functie
- Vier mogelijkheden  $V, I$

Input	Output	Transferfunctie	Symbool
V	V	(spannings)versterking $V/V$	$G(s), G_v(s)$
I	V	Transimpedantie $V/I$	$Z(s)$
I	I	Stroomversterking $I/I$	$G_I(s)$
V	I	Transadmittantie $I/V$	$Y(s)$

- Bereken transadmittantie  $I_2(s)/V_1(s)$



- knooppuntsanalyse

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_3}{R_1}$$

$$-\hat{I}_1 + \frac{\hat{V}_3}{sL} + sC(\hat{V}_3 - \hat{V}_2) = 0$$

$$\frac{\hat{V}_2}{R_2} - sC(\hat{V}_3 - \hat{V}_2) = 0$$

$$\hat{V}_2 = \frac{R_2 LC s^2}{CL(R_2 + R_1)s^2 + (L + CR_1 R_2)s + R_1} \hat{V}_1$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{V}_2}{R_2} = \frac{LC s^2}{CL(R_2 + R_1)s^2 + (L + CR_1 R_2)s + R_1} \hat{V}_1$$

In boek met lus analyse

- De transferfunctie bestaat uit een teller veelterm en een noemer veelterm in  $s$
- De **nulpunten** in  $s$  van de **teller** zijn de “**zeros**” van de transferfunctie
- De **nulpunten** in  $s$  van de **noemer** zijn de “**polen**” van de transferfunctie
  
- De polen en zeros van de transferfunctie bepalen de vorm van de transferfunctie en dus het gedrag van het lineaire systeem

- We gaan de transferfuncties tekenen op een systematische manier
- We gebruiken een semi-log plot in dB voor de amplitude (of dus een log-log plot)
- Definitie van dB of decibel → log v.d. verhouding van twee vermogens

$$\# dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

- Als deze vermogens door dezelfde weerstand gedissipeerd worden kunnen we schrijven

$$\# dB = 10 \log_{10} \frac{V_2^2 / R}{V_1^2 / R} = 10 \log_{10} \frac{I_2^2 R}{I_1^2 R}$$

$$\# dB = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}$$

- In de praktijk worden transferfuncties bijna altijd in dB uitgedrukt en wordt er abstractie gemaakt van de weerstand
- Verhoudingen van spanningen en stromen worden dus ook in dB uitgedrukt.

$$H(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)^{\pm N} (1 + j\omega\tau_1)(1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2) \dots}{(1 + j\omega\tau_a)(1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_b)^2) \dots}$$

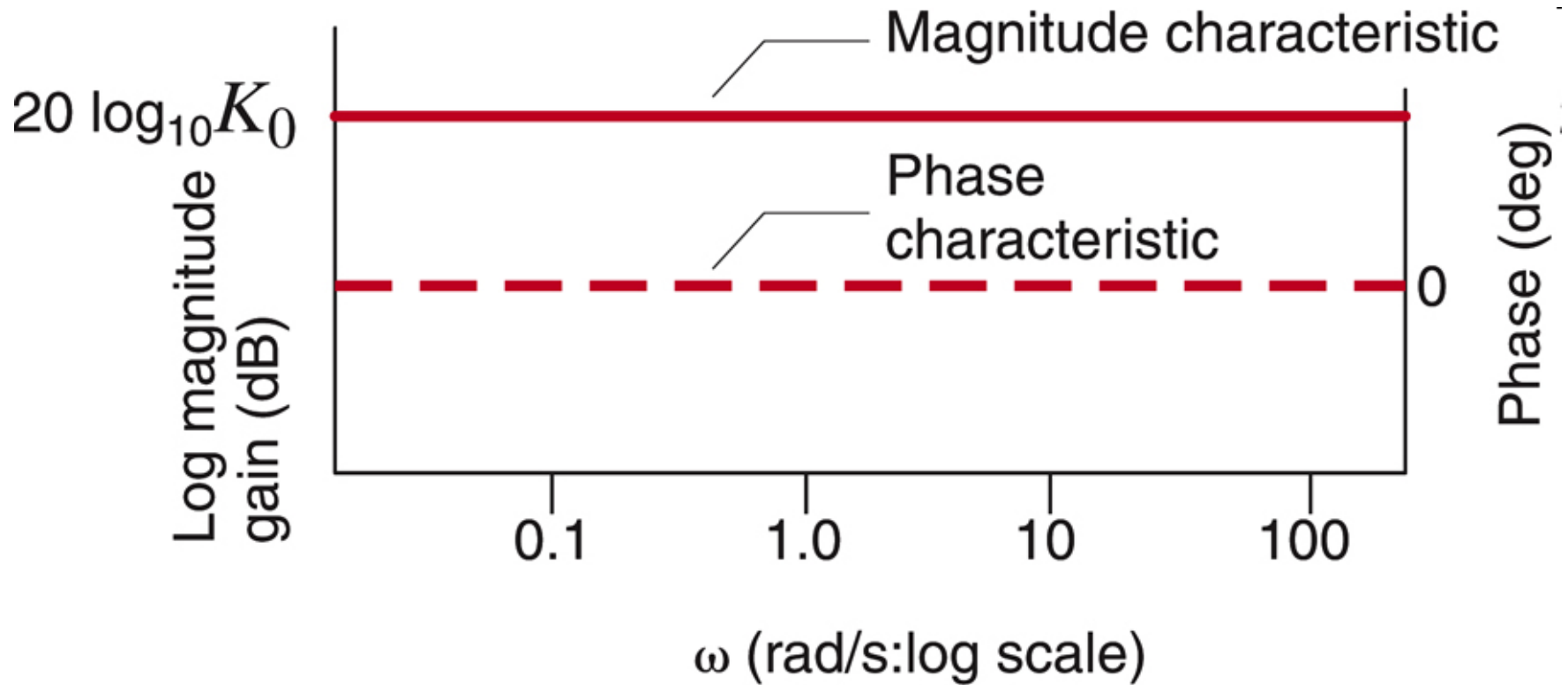
- 4 typische factoren
  - Een frequentie onafhankelijk factor  $K_0 > 0$  'DC gain'
  - Polen of zeros in de oorsprong  $(j\omega)^{\pm N}$
  - Polen en zeros van de vorm  $(1 + j\omega\tau)$
  - Quadratische polen en nullen van de vorm  $(1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2)$
- Als we dit in dB zetten (logaritme nemen) worden dit voor de amplitude allemaal termen van deze vorm. We krijgen een som! Fazes mogen we sowieso optellen.
- We gaan de individuele termen grafisch bekijken

$$H(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)^{\pm N} (1 + j\omega\tau_1)(1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2)\dots}{(1 + j\omega\tau_a)(1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_b)^2)\dots}$$

$$\log(H(j\omega)) = \log\left(\frac{K_0(j\omega)^{\pm N} (1 + j\omega\tau_1)(1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2)\dots}{(1 + j\omega\tau_a)(1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_b)^2)\dots}\right)$$

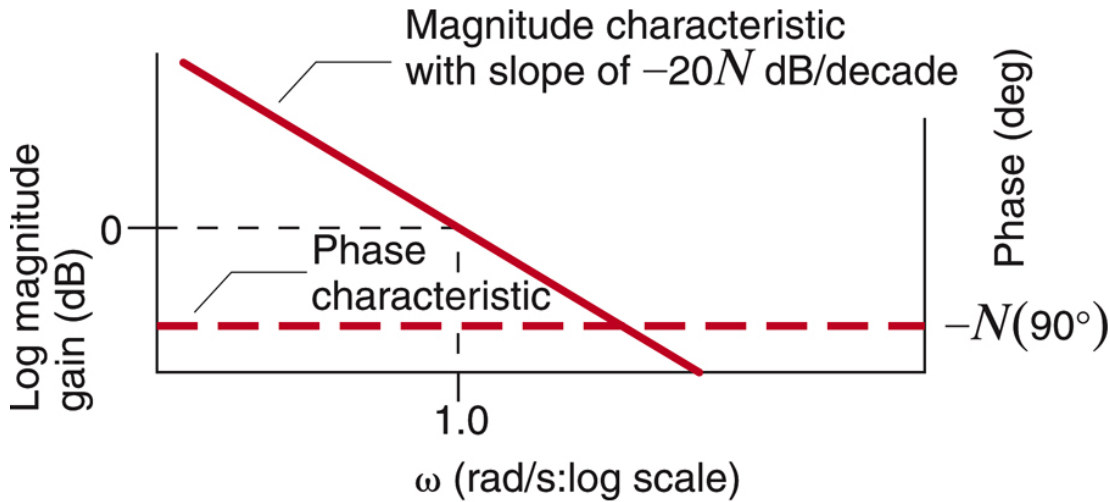
$$\begin{aligned}\log(H(j\omega)) = & \log K_0 \pm N \log(j\omega) + \log(1 + j\omega\tau_1) + \log(1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2) \\ & - \log(1 + j\omega\tau_a) - \log(1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_b)^2) + \dots\end{aligned}$$

- Product wordt optelling



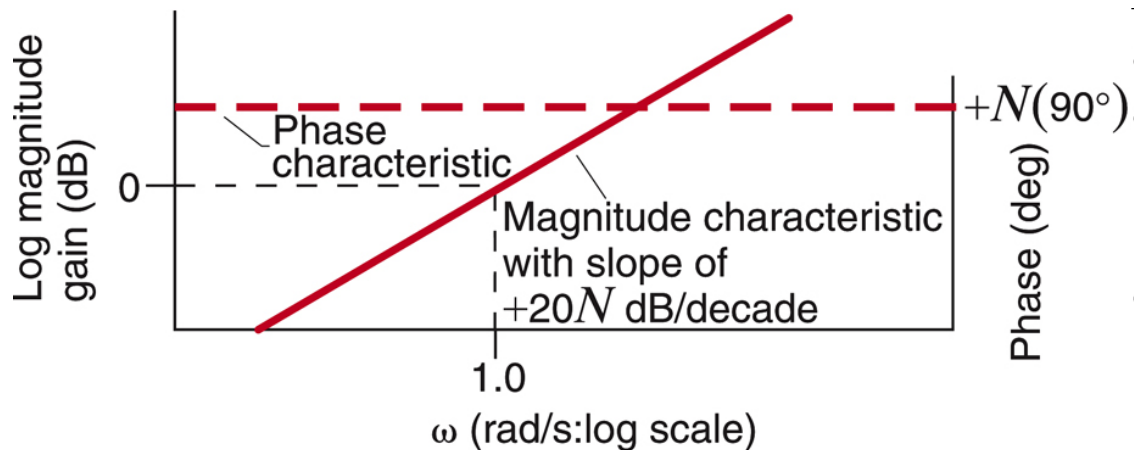


# Polen, zeros in de oorsprong



- Pole in 0  
( $N=1$ )

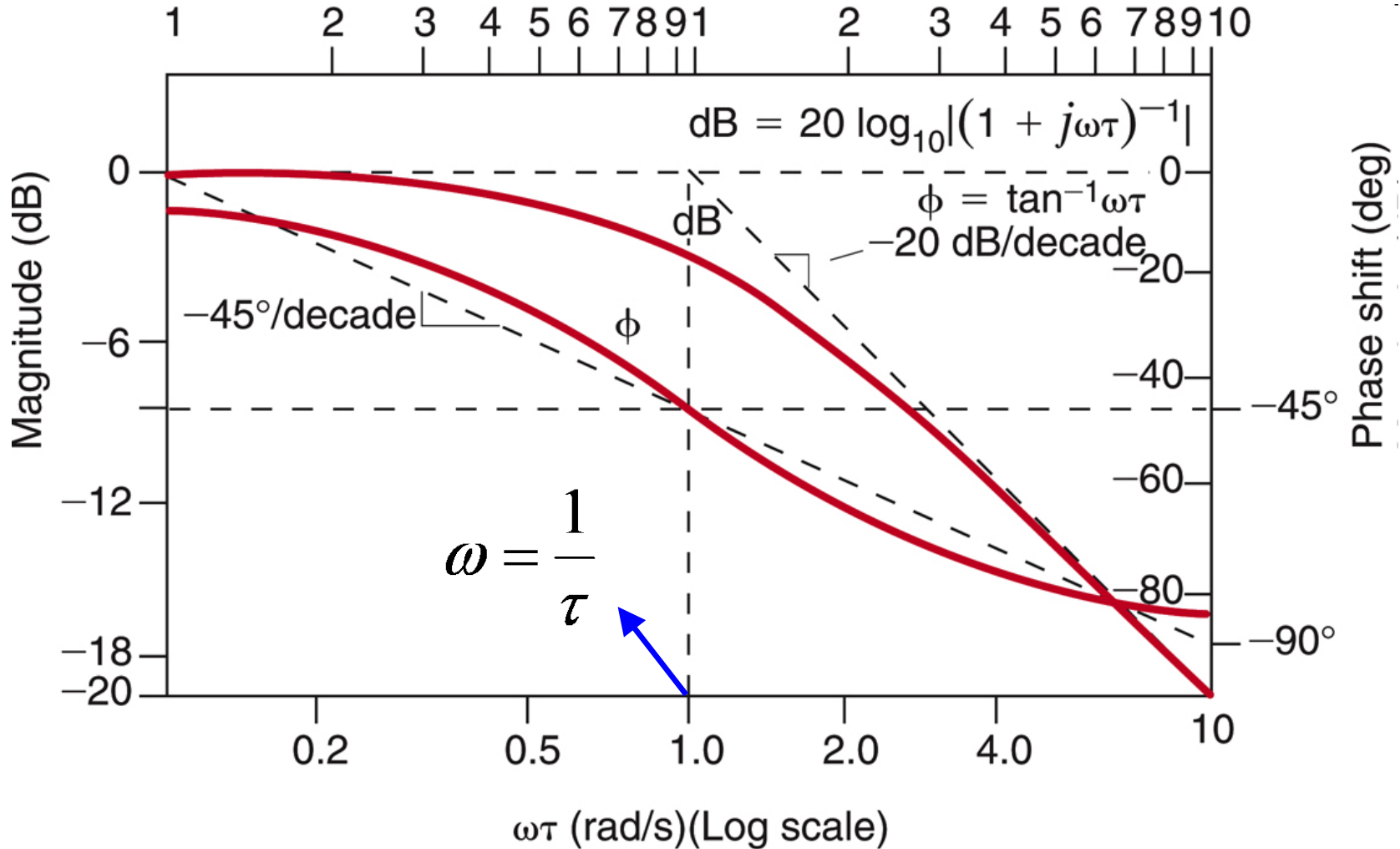
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

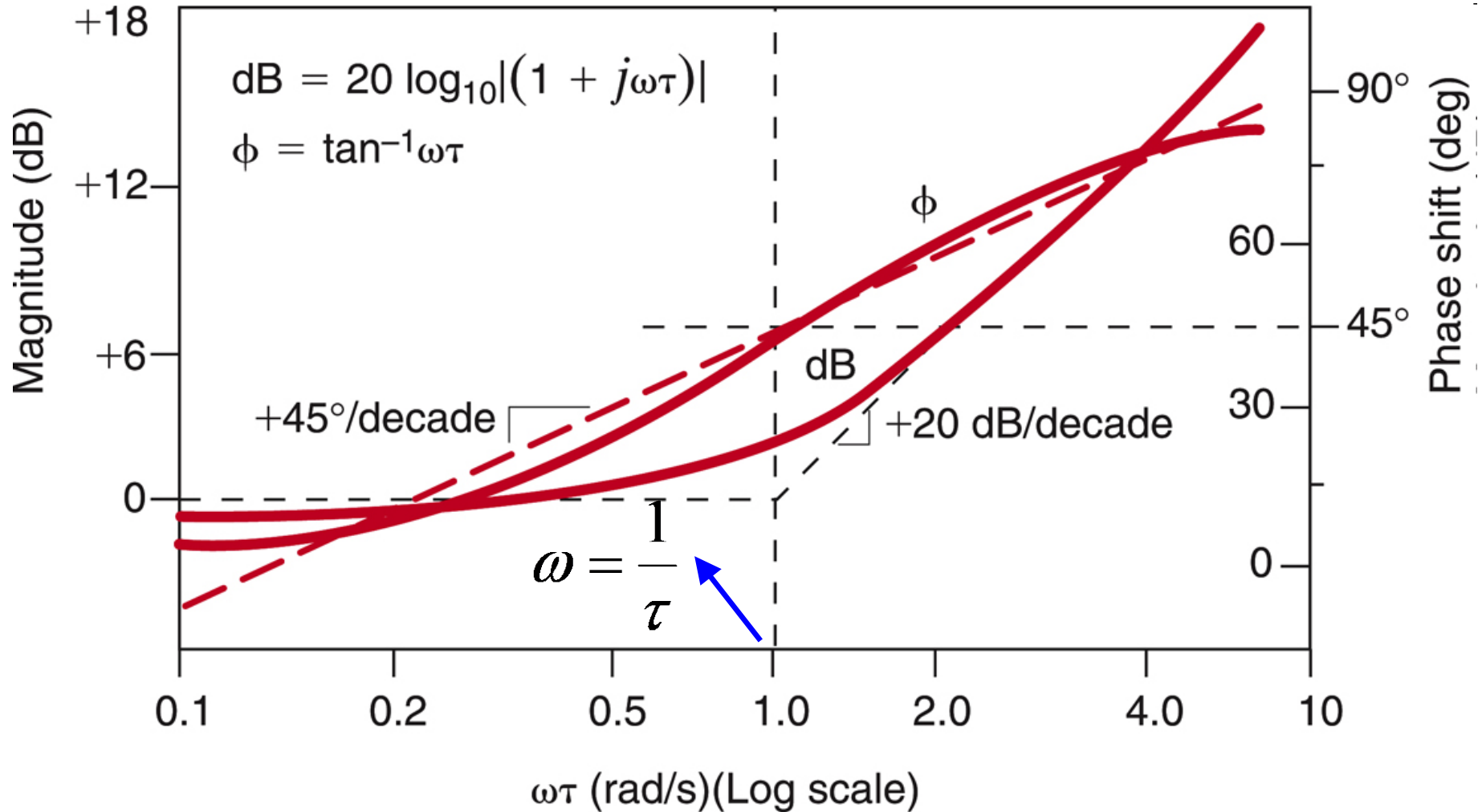


- Zero in 0  
( $N=1$ )

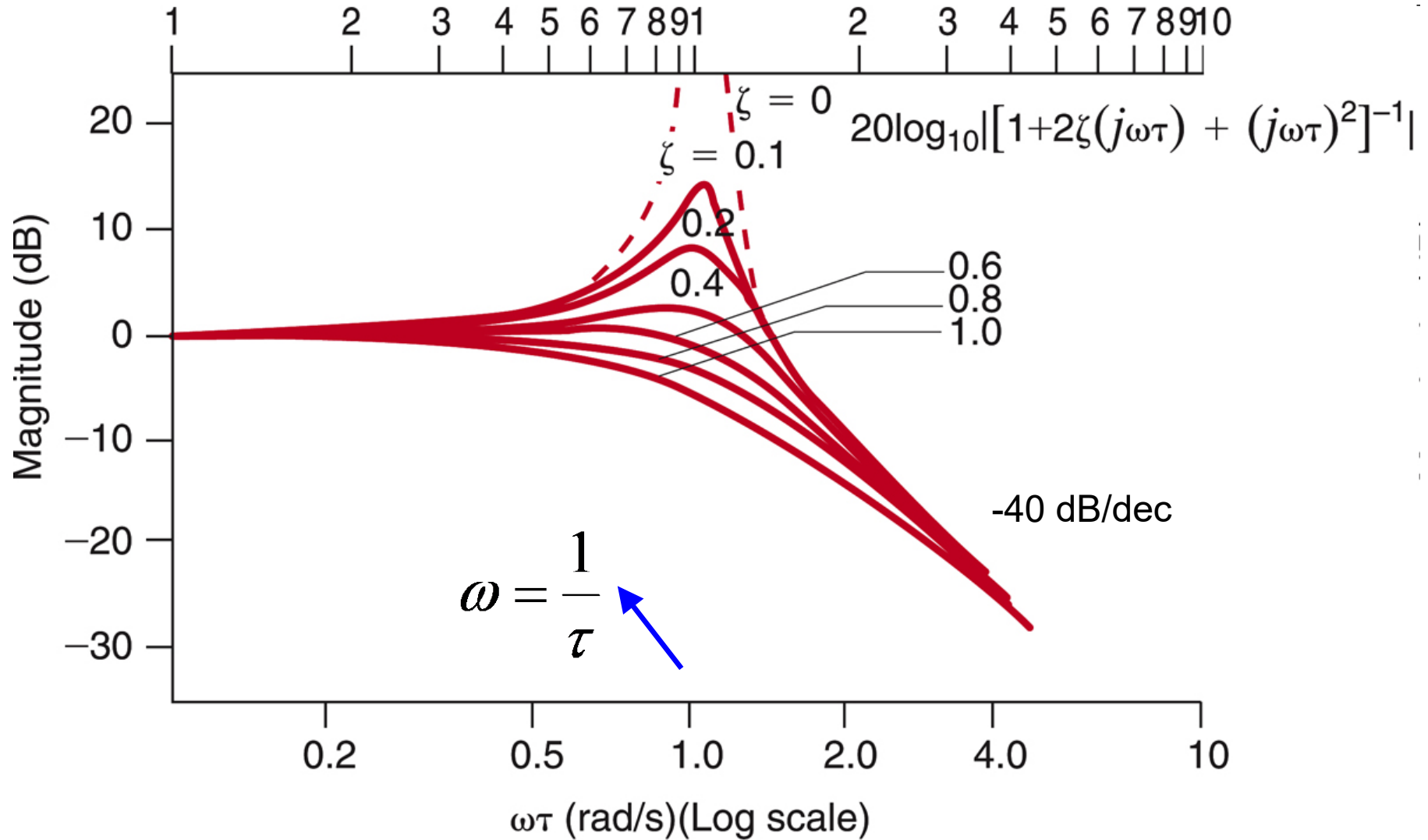
$$H(j\omega) = j\omega$$

# Enkelvoudige pool in $1/\tau$

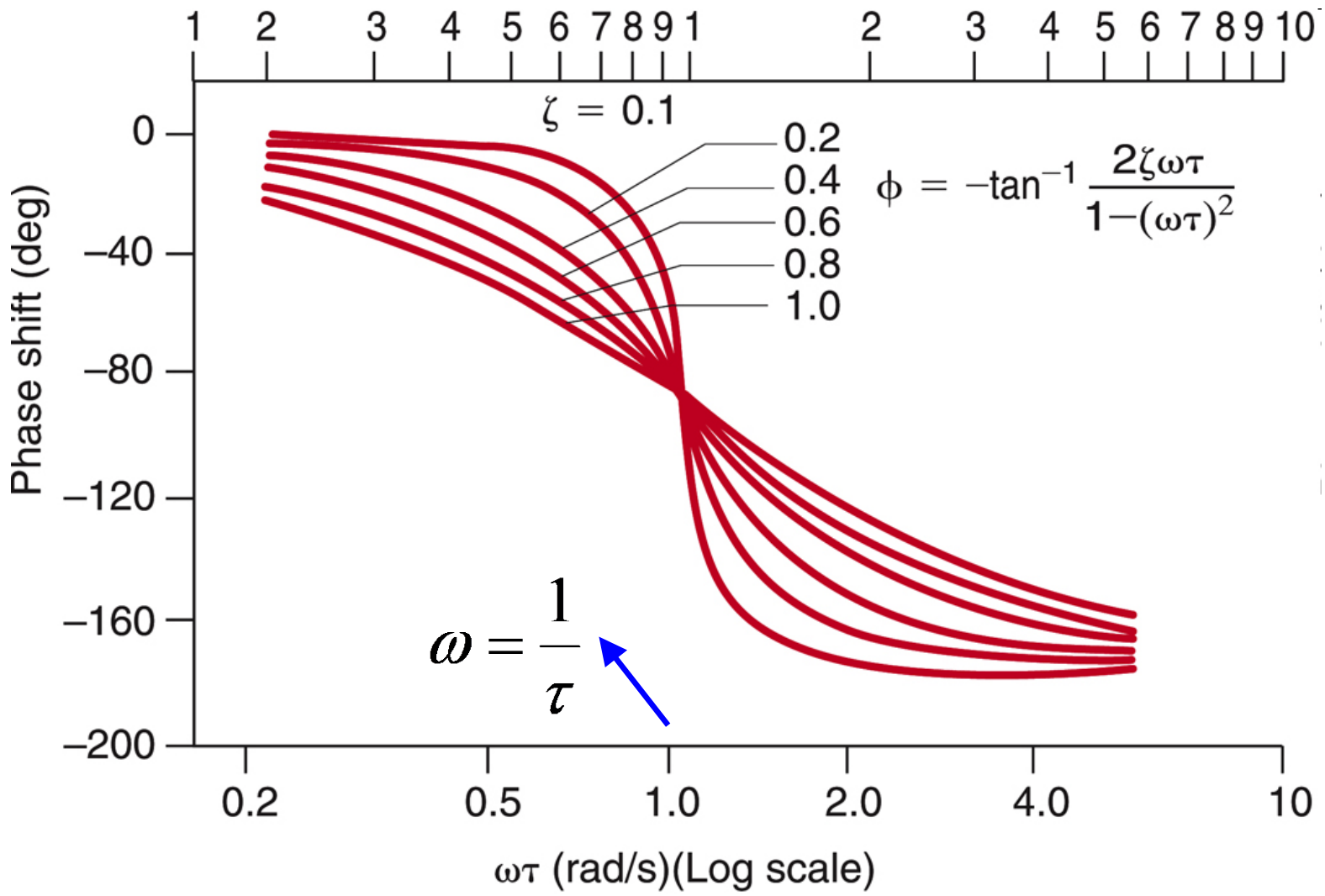




# Quadratische pool in $1/\tau$ - Amplitude



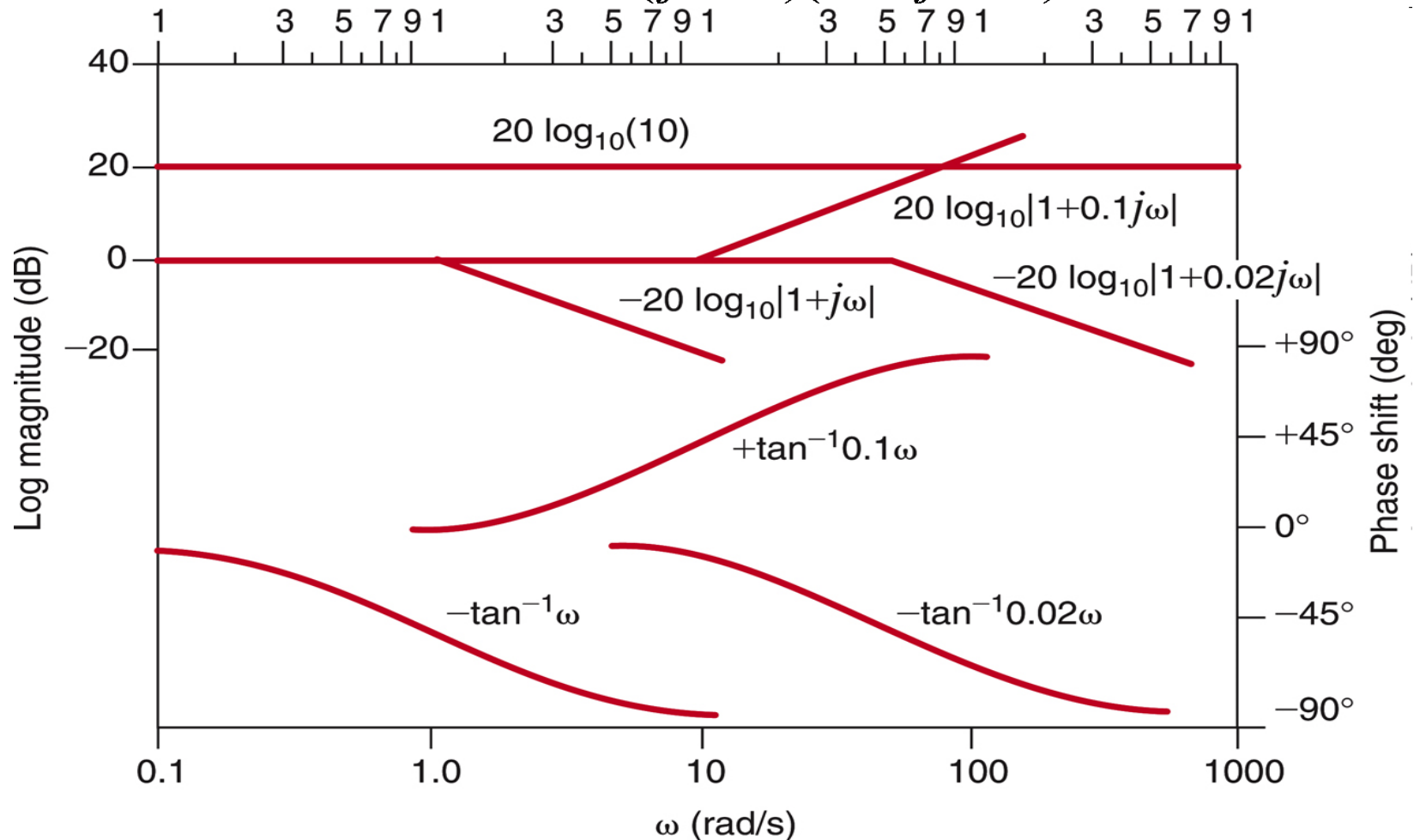
# Quadratische pool in 1/τ - faze

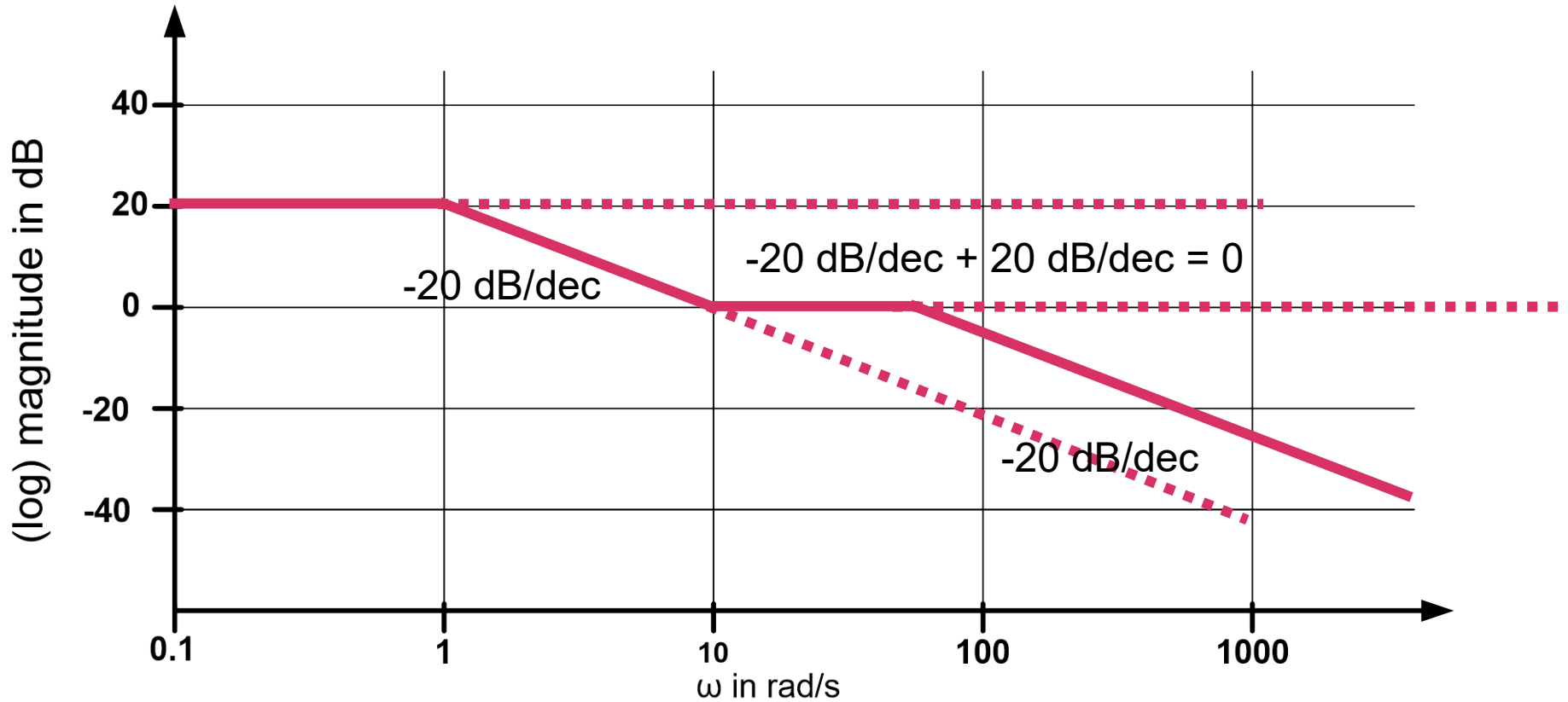


- Plots voor quadratisch zeros zoals voor quadratische polen maar
  - Helling is +40 dB/decade
  - Phase gaat naar +180 graden
- We kunnen nu de bode plot van gelijk welke transferfunctie maken door de elementaire gevallen op te tellen

# Voorbeeld – afzonderlijke bijdragen

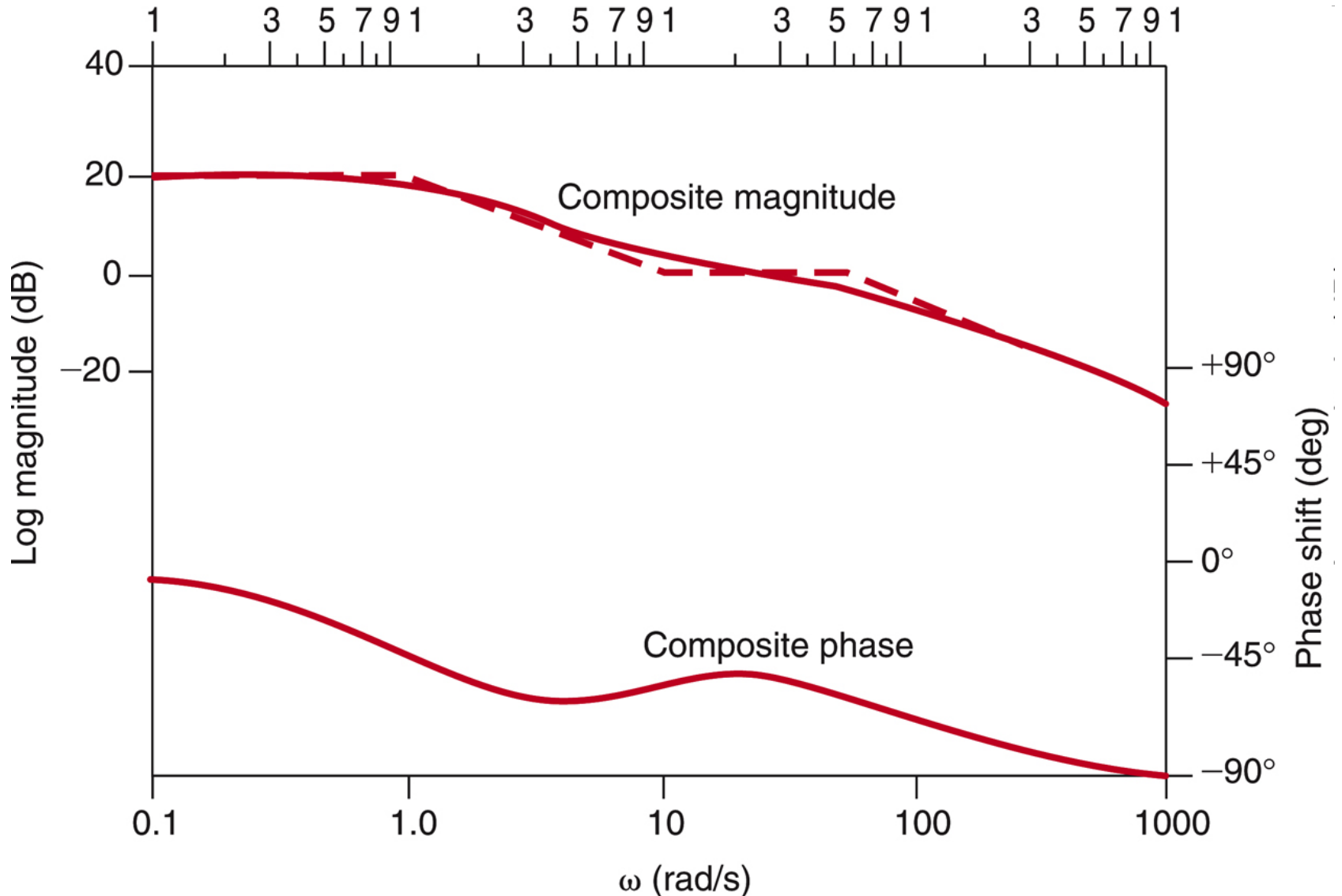
$$G_v(j\omega) = \frac{10(0.1j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}$$





$$G_v(j\omega) = \frac{10(0.1j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}$$





# Waarom veeltermen in 'j $\omega$ ' (of s) (I)

- Eigenlijk zijn we hier differentiaalvergelijkingen aan het oplossen

$$a_n \frac{\partial^n x(t)}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} x(t)}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial x(t)}{\partial t} + a_0 = e^{j\omega t}$$

- Oplossing bestaat uit termen van de vorm

$$x(t) = \hat{A} e^{j\omega t}$$

- De afgeleiden daarvan zijn

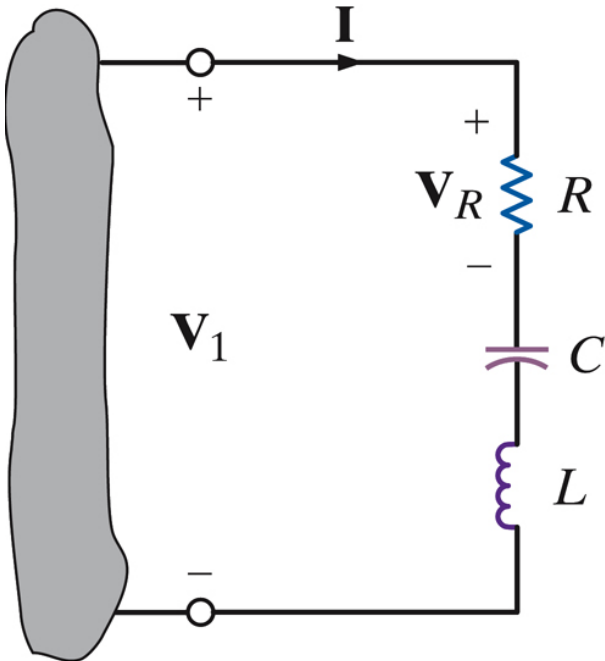
$$\frac{\partial^n e^{j\omega t}}{\partial t^n} = (j\omega)^n e^{j\omega t}$$

- De factor  $e^{j\omega t}$  kunnen we schrappen. Er blijft een veelterm in 'j $\omega$ ' (of s) over

## Waarom veeltermen in 'j $\omega$ ' (of s) (II)

- Coëfficiënten  $a_i$  worden gevormd uit  
 $Z_R=R, Z_C=1/j\omega C, Z_L=j\omega L$
- Dit geeft dus een breuk van twee veeltermen in 'j $\omega$ ' (of s)

**We zoeken dus nulpunten van teller en noemer in 'j $\omega$ ' (of s)**



- De impedantie

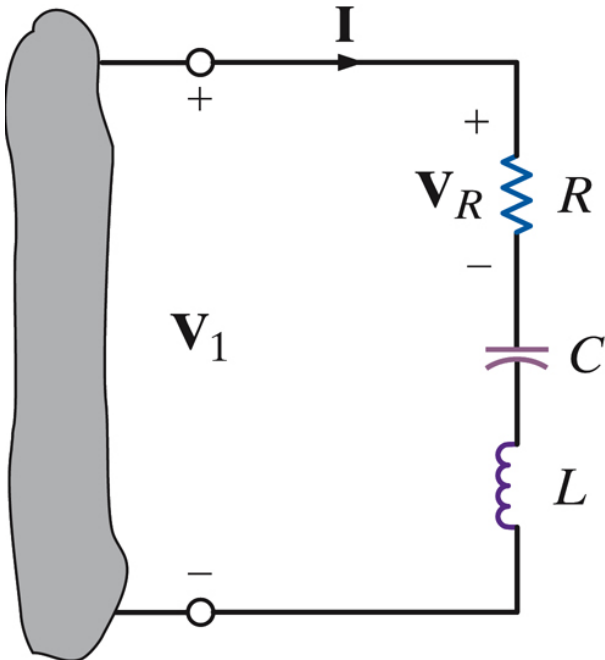
$$\hat{Z}(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- Het imaginair deel van deze impedantie wordt nul bij

$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$

- Dit fenomeen heet “resonantie”



- Serie resonantie

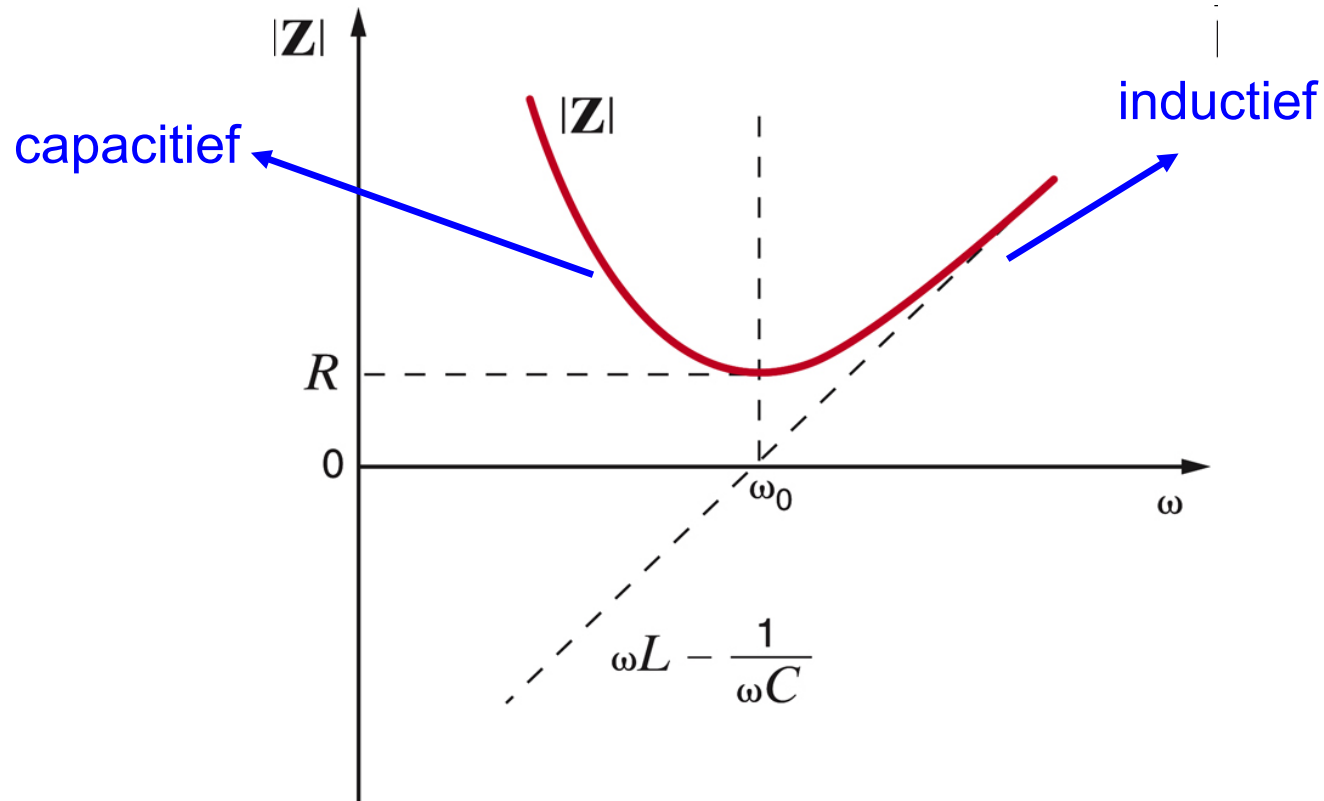
$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$$

Resonantiefrequentie!

- Stroom en spanning zijn in fase
- Stroom is maximaal voor een gegeven spanning

- Is dit nu gewoon een ingewikkelde manier om een weerstand te maken ???

# Serieresonantie in het frequentiedomein



- Definitie Q-factor = quality factor

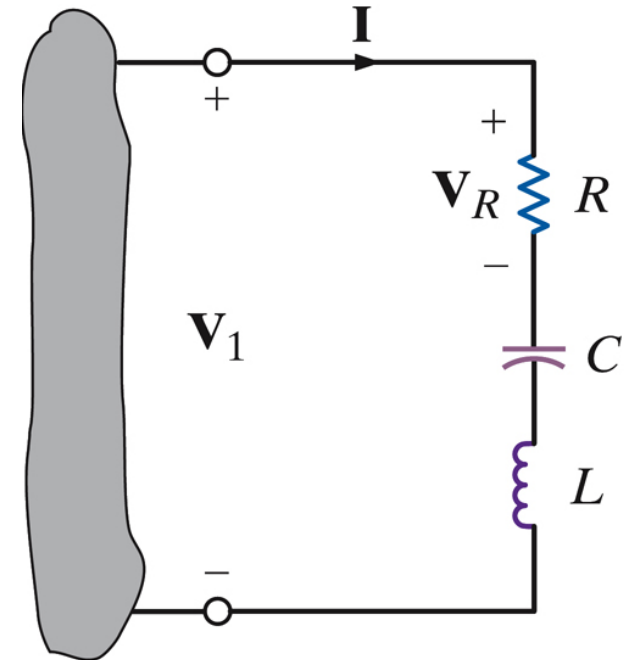
$$Q = \omega_0 \frac{L}{R}$$

- Dit is een belangrijke parameter om het gedrag van het circuit te beschrijven

- Transferfunctie  $\mathbf{G} = \mathbf{V}_R / \mathbf{V}_1 = \mathbf{R} \mathbf{I} / \mathbf{V}_1 = \mathbf{R} \mathbf{Y}$

$$\hat{Y}(j\omega) = \frac{\hat{I}}{\hat{V}_1} = \frac{1}{R \left[ 1 + j \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} \right) \right]}$$

$$= \frac{1}{R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega L}{RQ} - \frac{1}{\omega CRQ} \right) \right]}$$

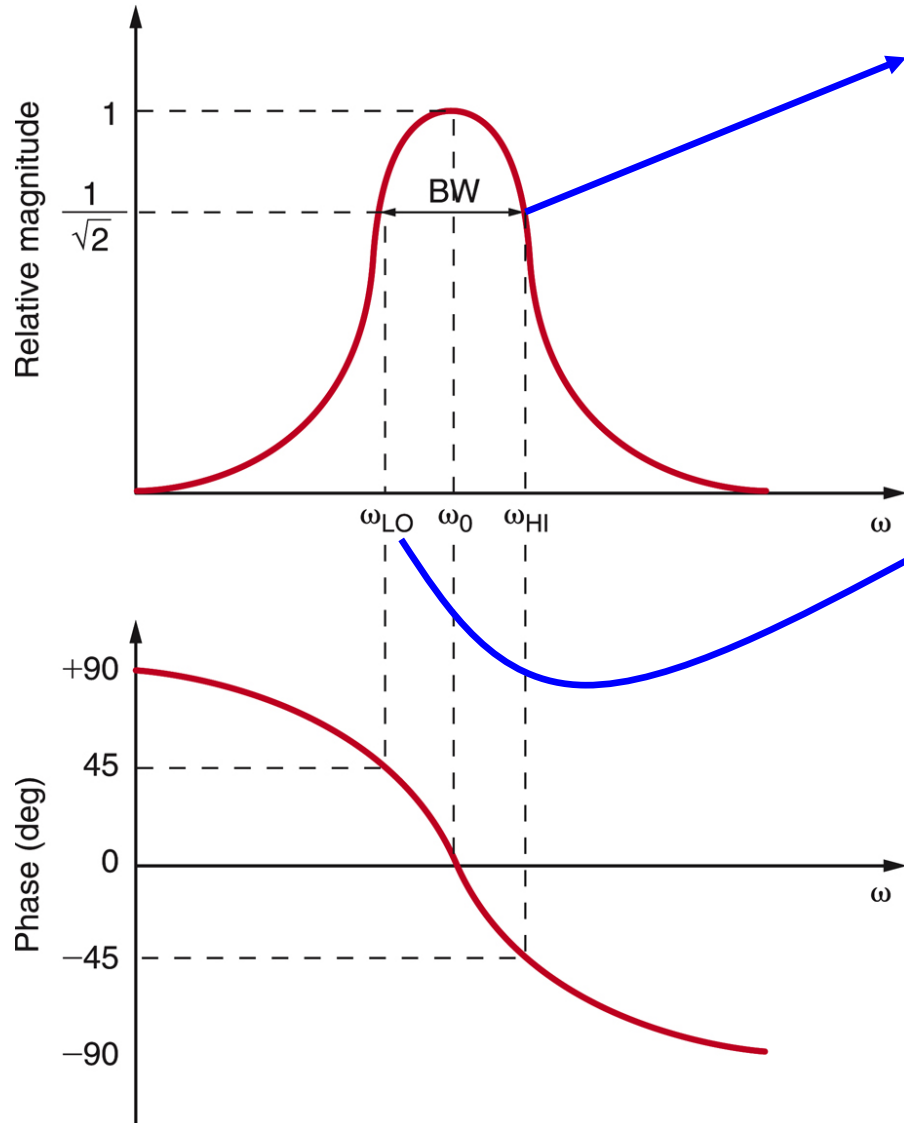


$$\hat{Y}(j\omega) = \frac{1}{R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(j\omega) = \frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_1} = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$



# Serieresonantie

## Spanning over de weerstand (II)



- Helft van het max. vermogen
- $3 \text{ dB} = \log_{10}(2^{1/2})$
- Definitie: kantelfrequentie (corner f, cut-off frequency)
- Definieert de bandbreedte
- Bandoorlaat filter
- Waar liggen deze frequenties?

- Kantelfrequentie berekenen door de amplitude van de transferfunctie gelijk te stellen aan  $1/2^{1/2}$

$$\left| \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$$

- De positieve oplossingen hiervan zijn

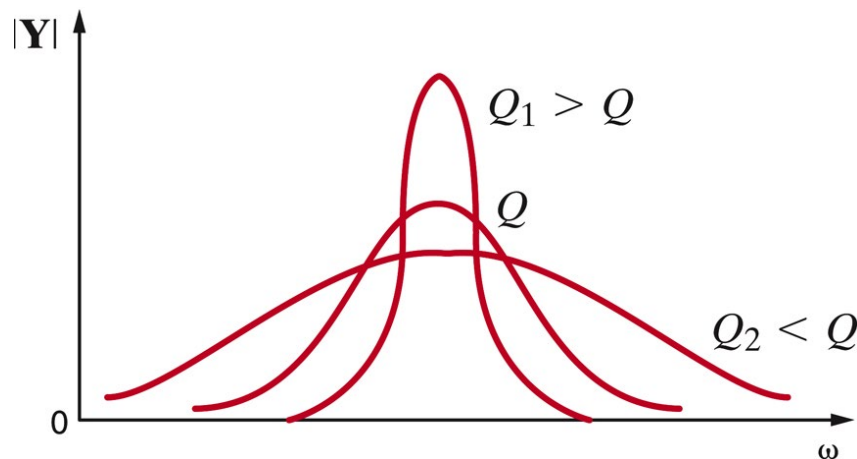
$$\omega_{LO} = \omega_0 \left[ -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$$

$$\omega_{HI} = \omega_0 \left[ +\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$$

$$\omega_{LO} = \omega_0 \left[ -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] \quad \omega_{HI} = \omega_0 \left[ +\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$$

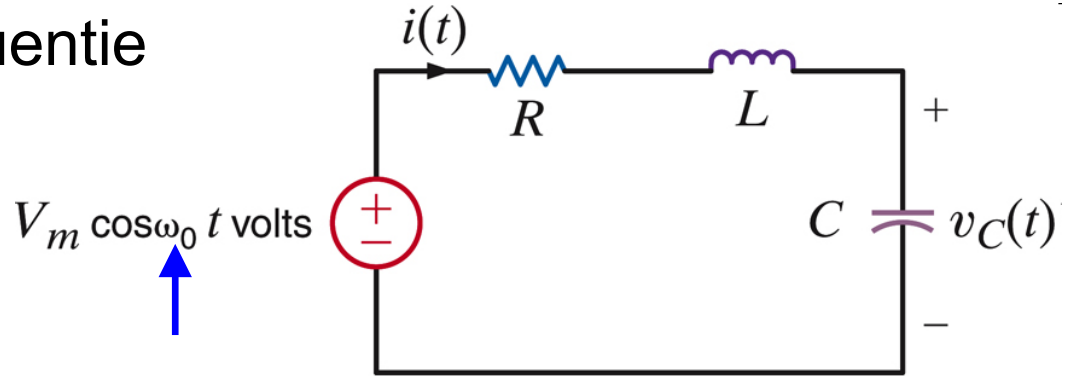
- De bandbreedte

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = \frac{\omega_0}{Q}$$



- Op de resonantiefrequentie geldt  $Z=R$ . Dus

$$i(t) = \frac{V_m}{R} \cos(\omega_0 t)$$



- En dus

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \hat{I} = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \angle -90^\circ$$

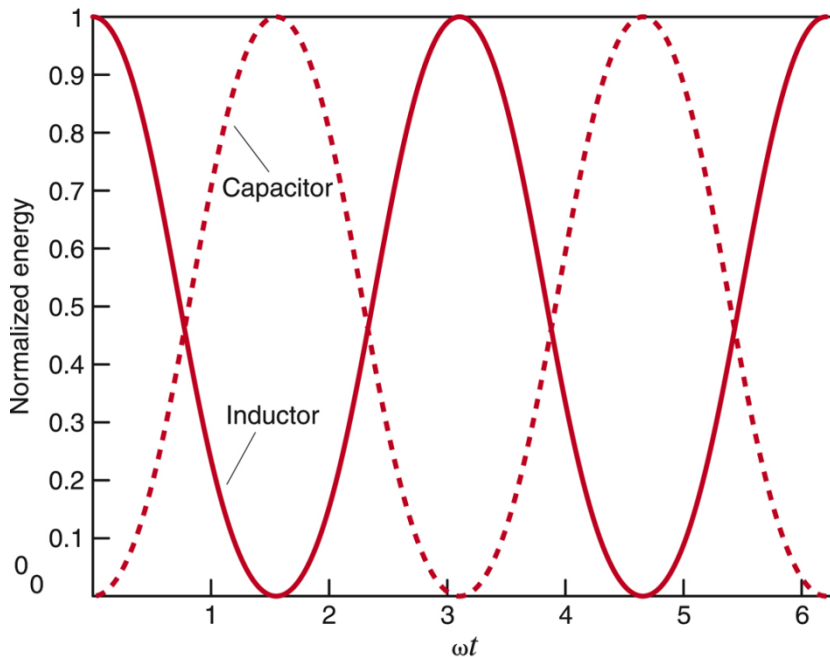
$$v_C(t) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin(\omega_0 t)$$

Fazeverval van  $90^\circ$  tussen spanning en stroom

- Voor de energie geef dit

$$w_L(t) = \frac{Li^2(t)}{2} = \frac{V_m^2 L}{2R^2} \cos^2(\omega_0 t)$$

$$w_C(t) = \frac{Cv^2(t)}{2} = \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 R^2 C} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{V_m^2 L}{2R^2} \sin^2(\omega_0 t)$$



- Totaal

$$w_S = \frac{V_m^2 L}{2R^2}$$

- Totaal wordt uitgewisseld tussen L en C

- Gedissipeerde energie per cyclus

$$W_D = \int_0^T Ri^2(t)dt = R \int_0^T \left( \frac{V_m}{R} \cos(\omega_0 t) \right)^2 dt = \frac{V_m^2 T}{2R}$$

- En dus

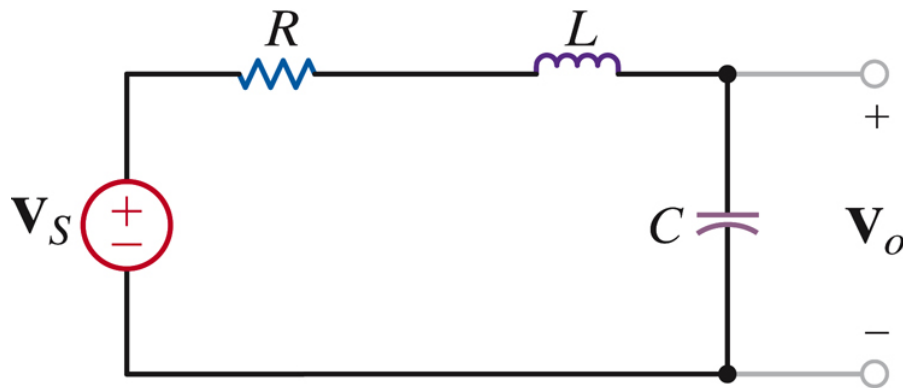
$$\frac{w_S}{w_D} = \frac{\frac{V_m^2 L}{2R^2}}{\frac{V_m^2 T}{2R}} = \frac{L}{RT} = \frac{L}{R \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{R 2\pi}$$

- Met  $Q = \omega_0 L / R$  geeft dit

$$Q = 2\pi \frac{w_S}{w_D} \longrightarrow \text{Fysische definitie van } Q$$

# Resonantie kan gevaarlijk zijn (I)

- De spanning op de spoel of condensator kan groter zijn dan de aangelegde spanning
- Hoe groot? Bij welke frequentie?
- Max. zoeken via afgeleide ...



$$V_o = \frac{V_S}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$
$$\frac{d|V_o|}{d\omega} = 0$$

- Afleiden en oplossen naar  $\omega$  geeft

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} \right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{Q} \right)^2} = \omega_0 \left( \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right)$$

Merk op:  $\omega_{\max}$  is  $\omega_0$  voor oneindige  $Q$

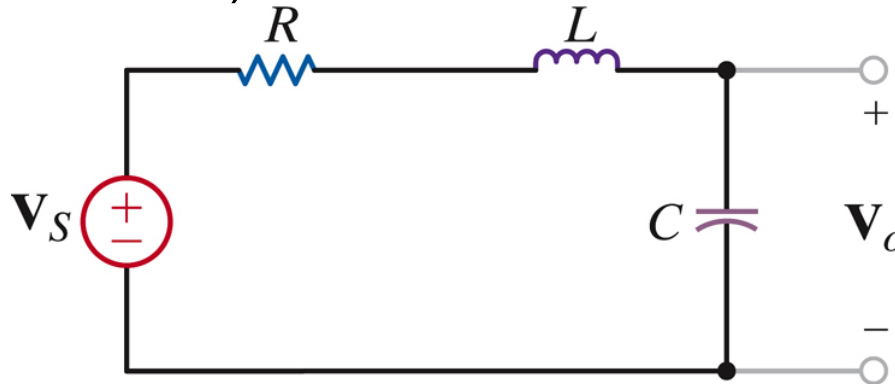
- Voor de maximale amplitude geeft dit

$$\left| \hat{V}_0 \right|_{\max} = \frac{Q \hat{V}_s}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}}$$

Merk op: voor grote  $Q$  geldt  $|V_0|_{\max} \approx QV_s$



- Bereken te transfer functie voor  $R=1 \Omega$  en  $R=50\Omega$   
( $C= 5 \mu\text{F}$  en  $L= 50 \text{ mH}$ )

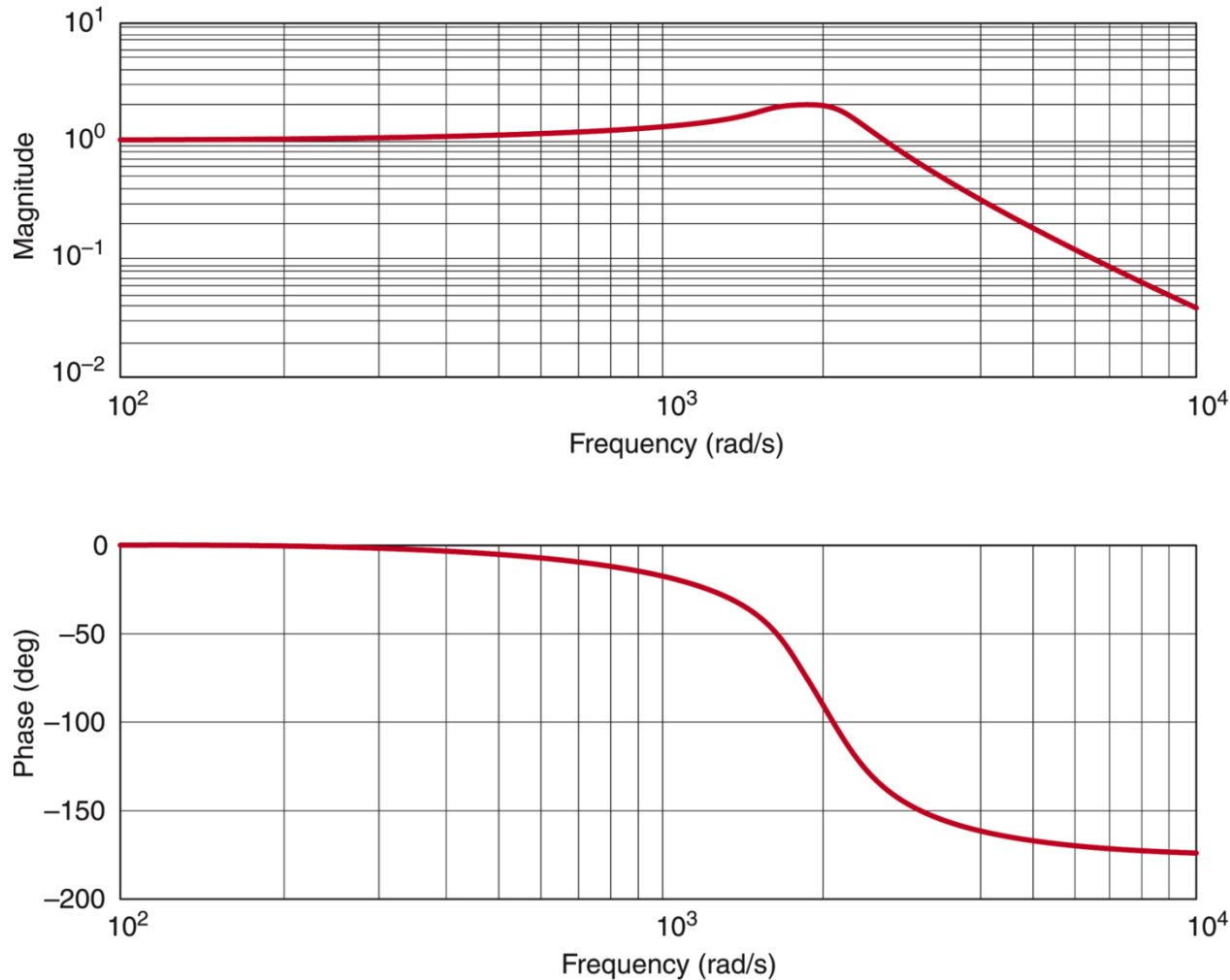


$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2000 \text{ rad / s}$$

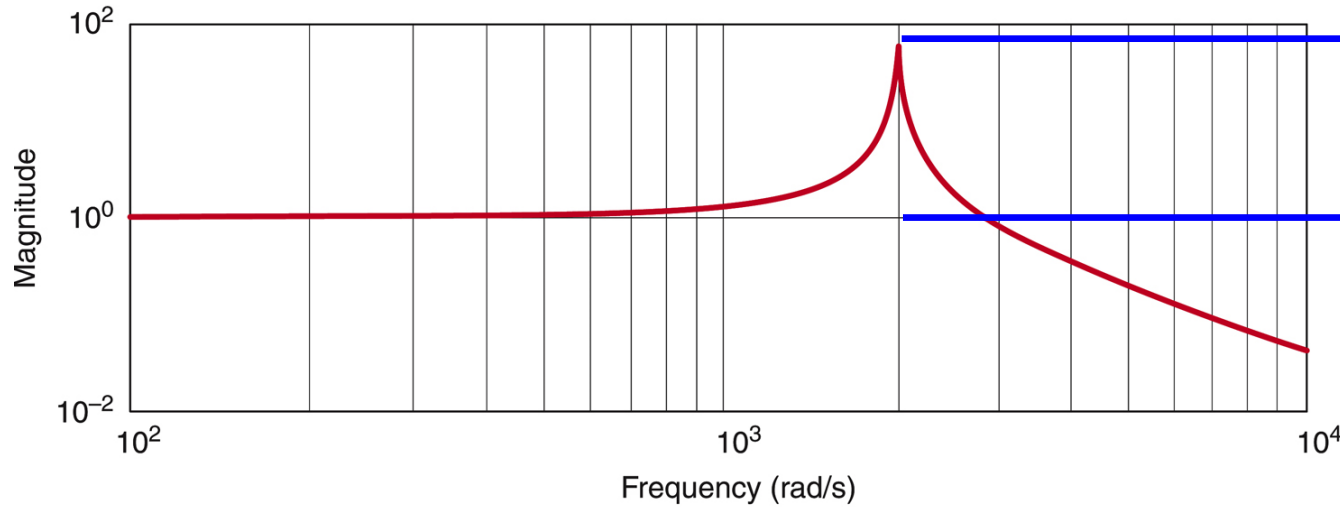
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 2 \text{ voor } R = 50, Q = 100 \text{ voor } R = 1\Omega$$

1V in geeft 100V uit!!

# Voorbeeld - Bode plot voor $Q=2$



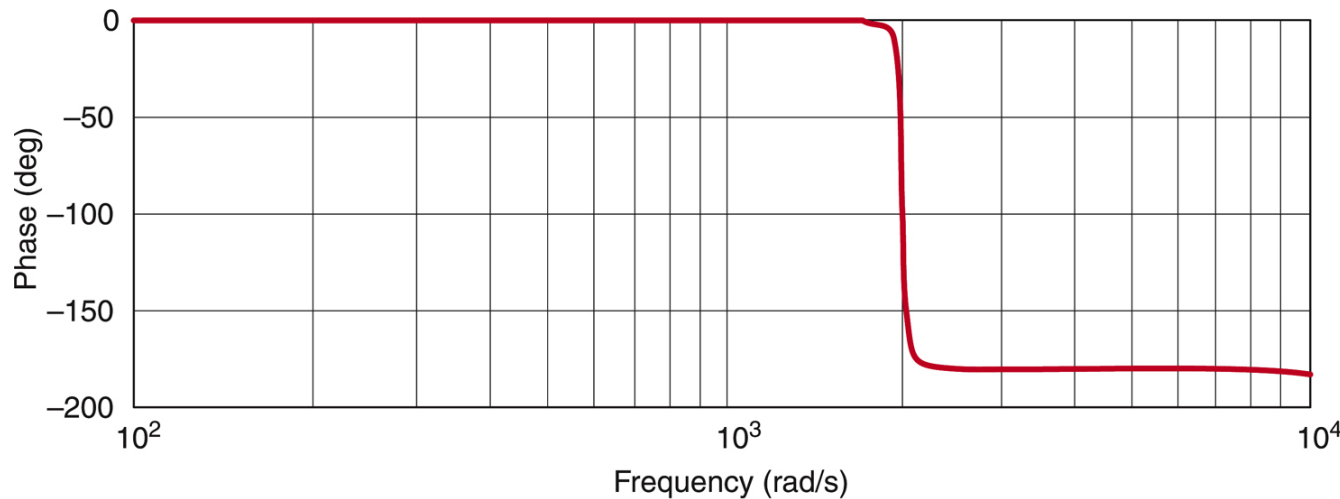
# Voorbeeld - Bode plot voor $Q=100$



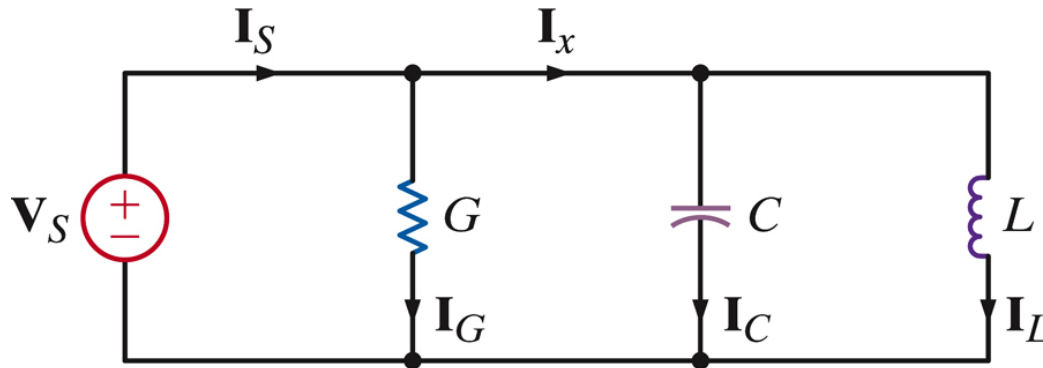
X 100

Steile Bandpass!

100V als je 1V aanlegt



- Dit is het duaal geval



- De stroom

$$I_S = I_G + I_L + I_C$$

$$I_S = V_S \left[ G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}_s}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{G} + \mathbf{j} \left( \omega \mathbf{C} - \frac{1}{\omega \mathbf{L}} \right)$$

- In resonantie geldt dat het imaginair deel van de admittantie nul moet zijn en dus  $\mathbf{Y} = \mathbf{G}$
- De resonantie frequentie wordt dus gegeven door

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}}$$

# Wat is de Q factor van dit netwerk

- Bereken Q factor volgens een van deze definities

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = \frac{\omega_0}{Q}$$

3 dB kantelpunten

$$Q = 2\pi \frac{w_S}{w_D}$$

Opgeslagen/gedissipeerde energie in de tank

- Dan vind je

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{G \omega_0 L} = R \omega_0 C = \frac{\omega_0 C}{G}$$

- Dit is  $1/Q$  serieresonantie, het gaat dan ook het duale netwerk ...

- De standaardvorm van de serie resonante admittantie is

$$\hat{Y}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1}$$

- De standaardvorm voor de noemer van een transferfunctie met twee complexe polen is

$$(j\omega\tau)^2 + j2\zeta\omega\tau + 1 \quad \text{waarbij } \tau = 1/\omega_0$$

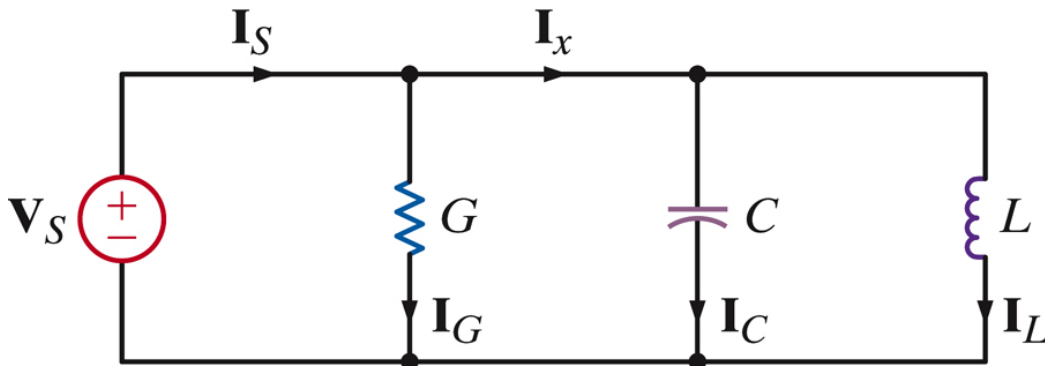
- Door de noemers gelijk te stellen dat

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{(ook geldig voor parallelresonantie)}$$

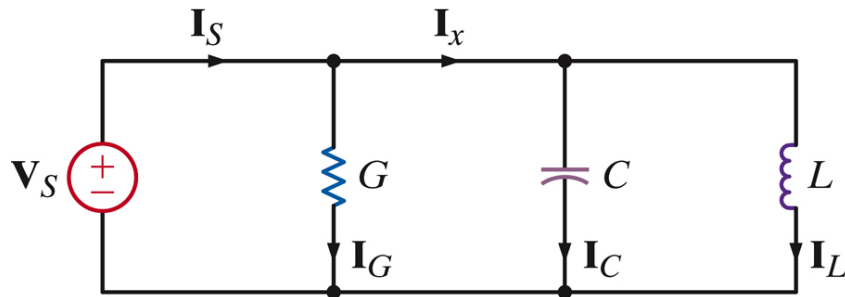
- Een hoge Q factor geeft dus een kleine demping

# De stroom in resonantie (I)

- De stroom uit de bron is in phase met de spanning in resonantie
- Is de stroom door de L en C dan 0 in resonantie?
- Nee hoor ...



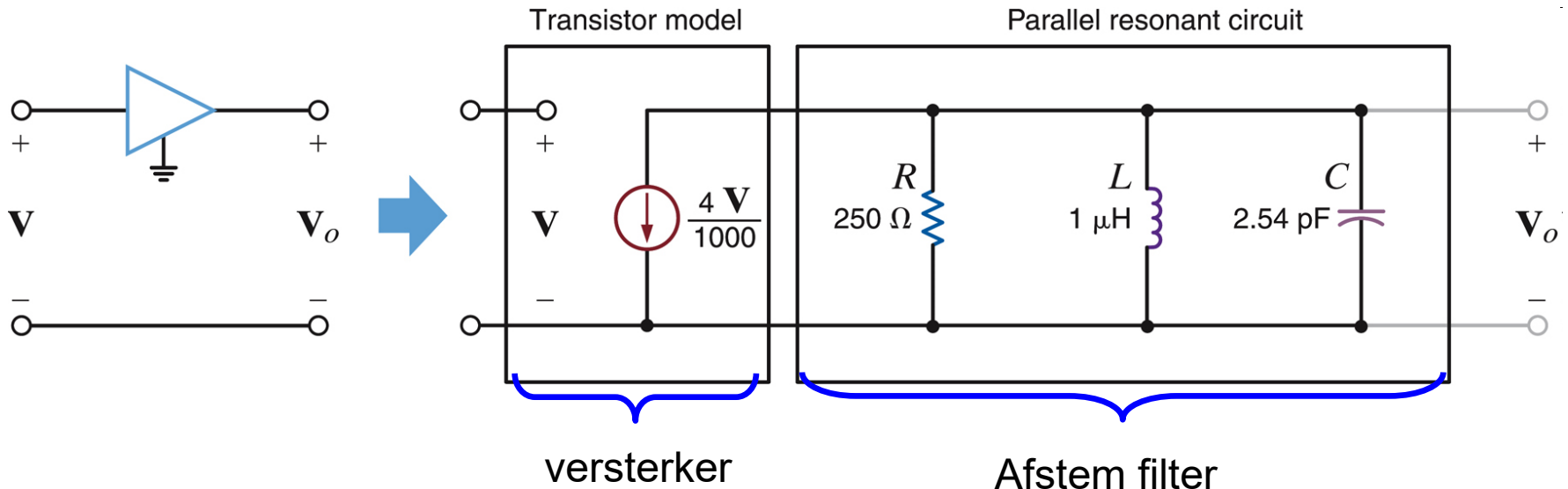




$$\hat{I}_C = V_S j\omega_0 C = V_S \frac{j}{\sqrt{LC}} C = V_S \frac{j}{\sqrt{L/C}}$$

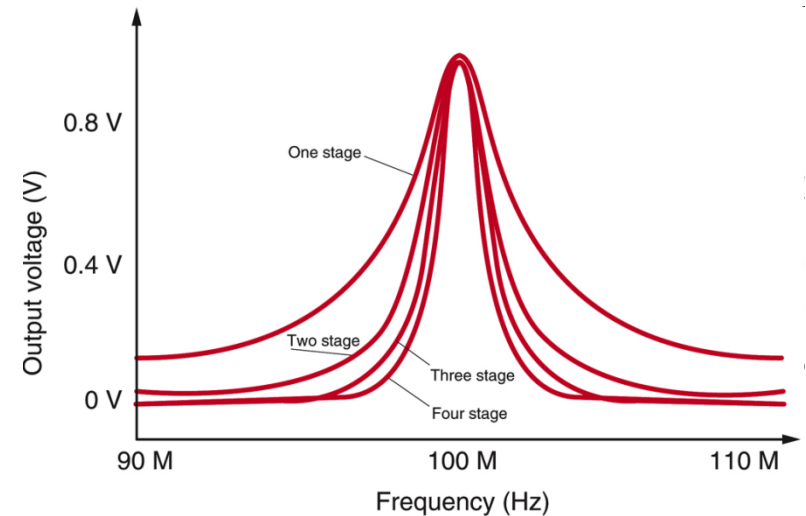
$$I_L = V_S \frac{1}{j\omega_0 L} = V_S \frac{-j}{\frac{1}{\sqrt{LC}} L} = V_S \frac{-j}{\sqrt{L/C}}$$

- Deze stromen zijn gelijk en 180 graden uit fase. Hun som is dus 0.
- Fysisch: de bron levert stroom aan de weerstand. De L en de C wisselen energie uit met elkaar
- Als  $G=0$ , is dit een ideale oscillator maar je kunt ze niet belasten.



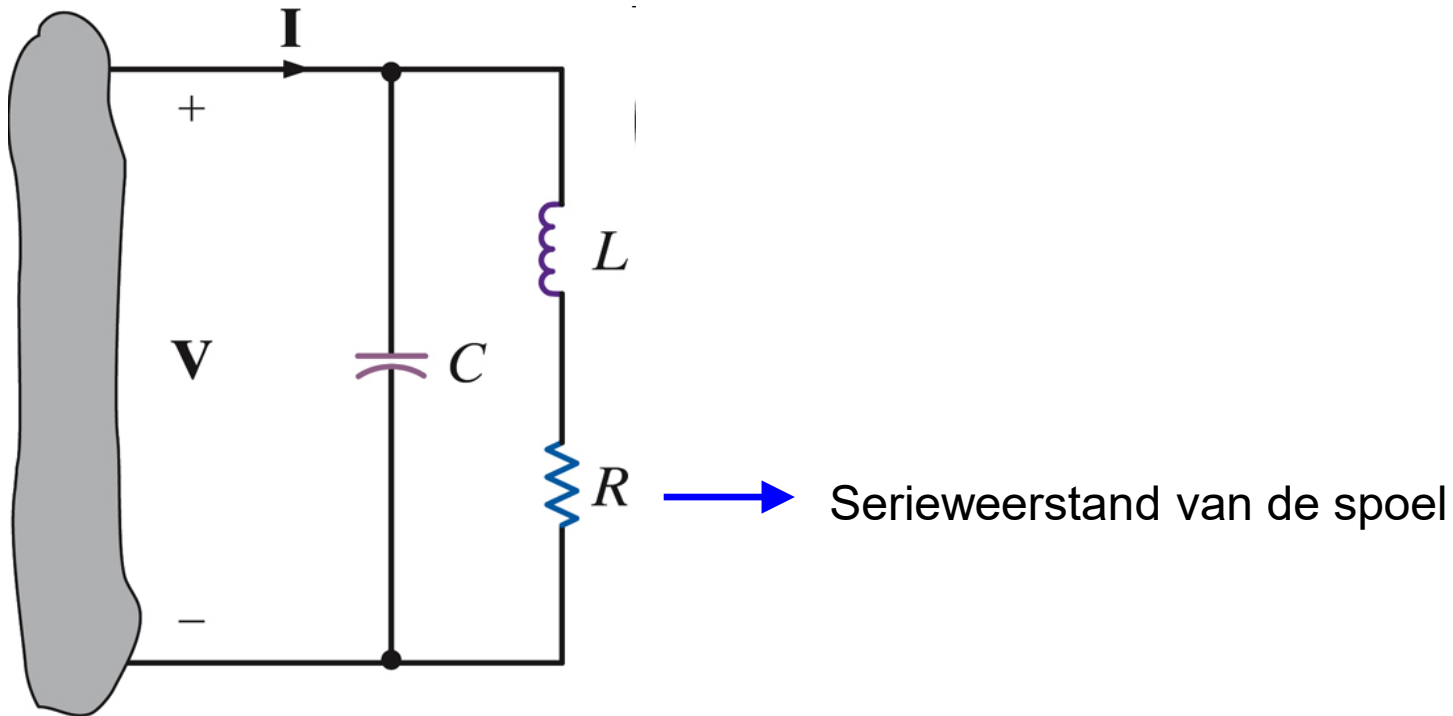
Het station op 100 MHz wordt versterkt de andere gaan eruit

Zie oefenzitting!



# Een echte spoel heeft weerstand (I)

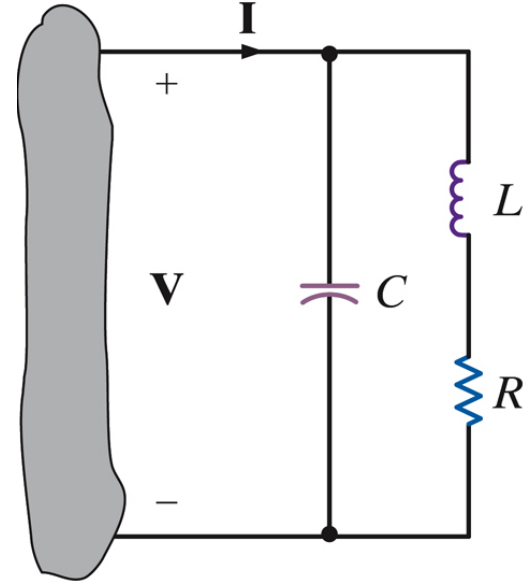
- De serieweerstand is nooit nul.
- Dit is dus een meer realistisch parallel resonant netwerk



# Een echte spoel heeft weerstand (II)

$$\hat{Y}(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \quad \text{via } (C \parallel (R + L))$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$



- In resonantie is  $\mathbf{Y}$  reëel. De resonantie frequentie is dus

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

- We hebben tot nu toe de Q factor van een resonant netwerk of ‘tank’ gedefinieerd
- In de literatuur ga je ook de Q-factor van een echte, niet ideale spoel met serieweerstand vinden als

$$Q_{\text{spoel}} = \frac{\omega L}{R_{\text{serie}}}$$

L is de inductantie van de spoel,

$R_{\text{serie}}$  de parasitaire, onvermijdelijke serieweerstand

- Deze Q factor is niet gedefinieerd bij een resonantiefrequentie (spoelen op zich resoneren niet), maar is functie van de frequentie

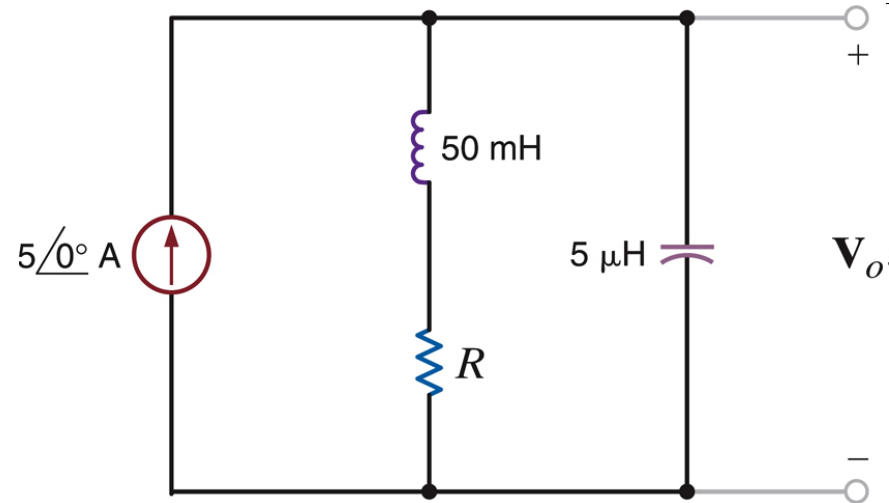
$$Q_{\text{spoel}} = \frac{\omega L}{R_{\text{serie}}}$$

L is de inductantie van de spoel,

$R_{\text{serie}}$  de parasitaire, onvermijdelijke serieweerstand

- Deze Q factor zegt iets over de kwaliteit van de spoel. Hoe hoger de Q factor (hoe kleiner de serieweerstand) hoe beter we de Q factor van ‘tanks’ met deze spoel gaan kunnen maken.
- Je kunt iets gelijkaardigs doen voor parasitaire, parallelle lekweerstand van condensatoren...

Wat zijn de natuurlijke  
frequentie en de  
resonantiefrequentie voor  
 $R=50 \Omega$  en  $R=5 \Omega$

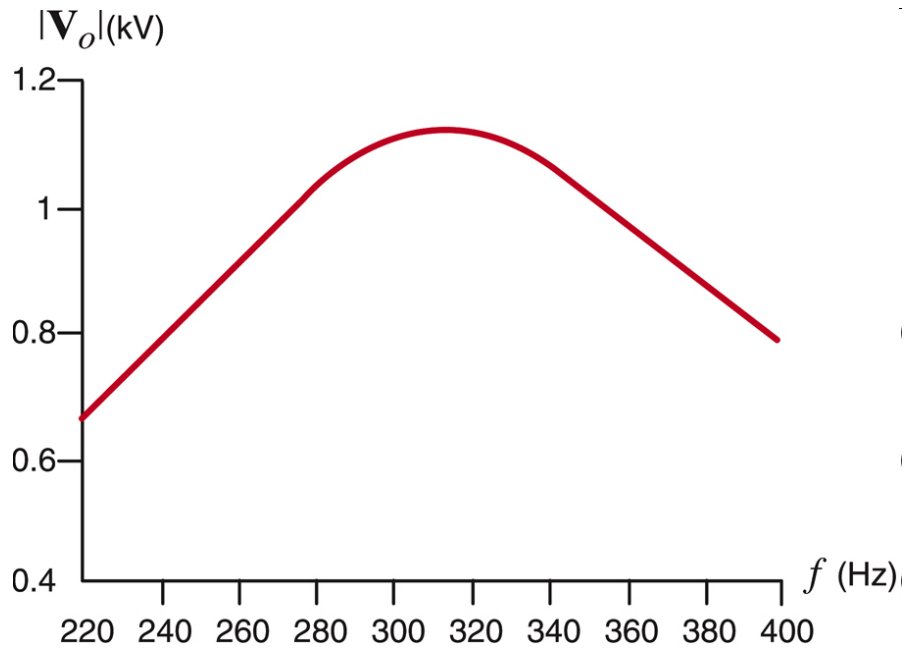


$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2000 \text{ rad/s} \rightarrow f_0 = 318.3 \text{ Hz}$$

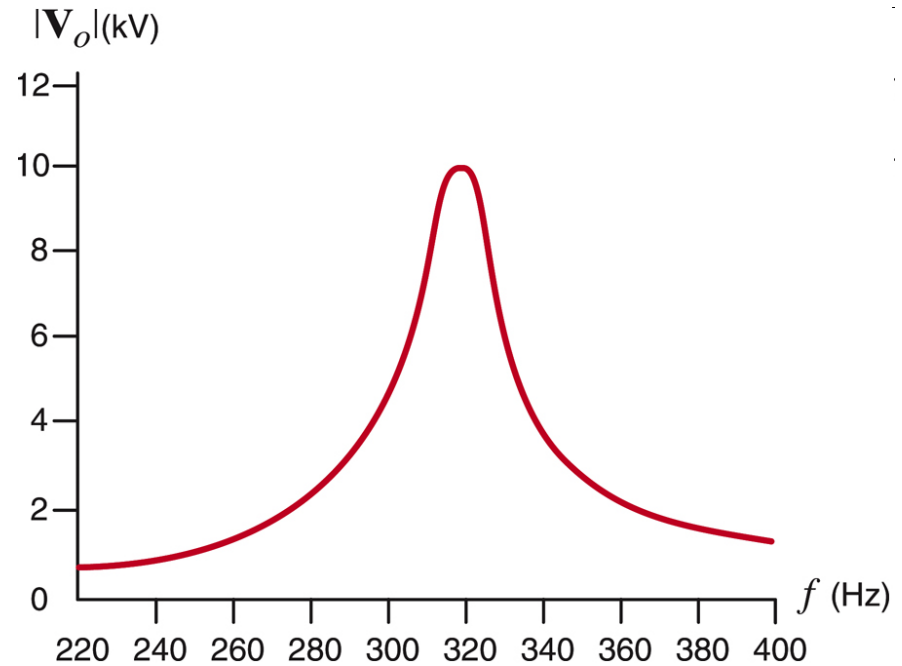
$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

$$= 1732 \text{ rad/s} \rightarrow f_0 = 275.7 \text{ Hz} \text{ voor } R = 50 \Omega$$

$$= 1997 \text{ rad/s} \rightarrow f_0 = 317.9 \text{ Hz} \text{ voor } R = 5 \Omega$$



$R = 50 \Omega$



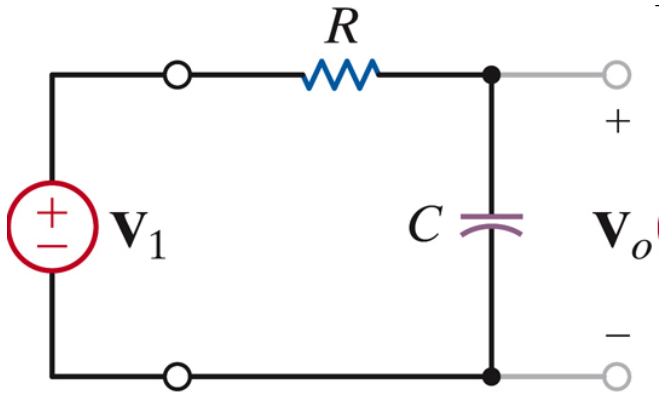
$R = 5 \Omega$



- Filters zijn circuits die selectief bepaalde frequenties versterken of verzwakken. (fourier!)
- Eigenlijk hebben we in dit hoofdstuk nog niets anders gezien...
- Je hebt allemaal een “treble” en “bass” knop op muziekinstallatie of een equalizer op je mp3 ...
- Miljoenen applicaties: ruisonderdrukking, interferentie onderdrukking, kanaalselectie, onderdrukken van “out of band” vermogen, ...

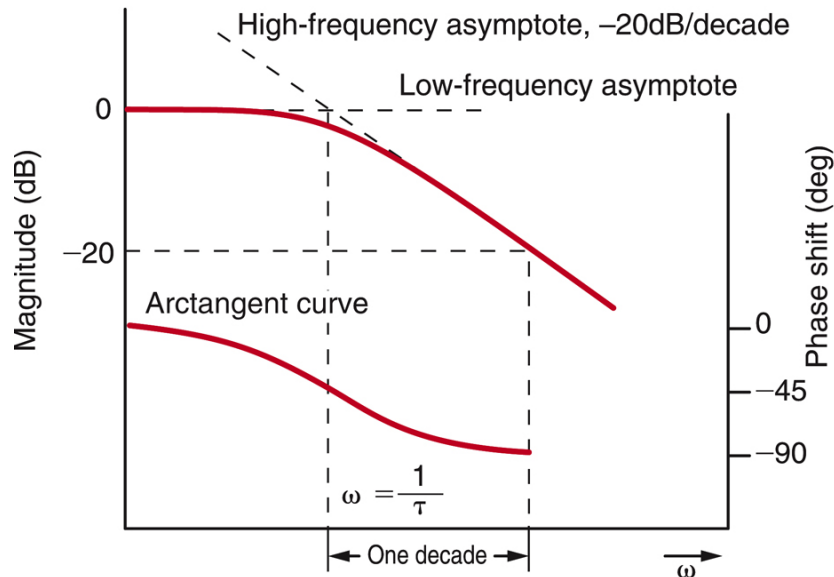
# Filter types – laag doorlaat

Low pass



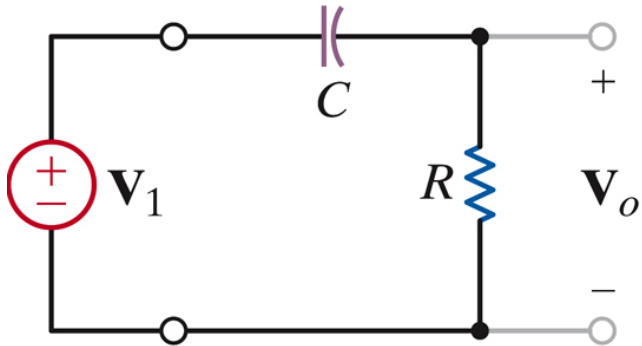
$$\hat{G}_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- Afsnijffrequentie  $\omega_c = 1/RC$



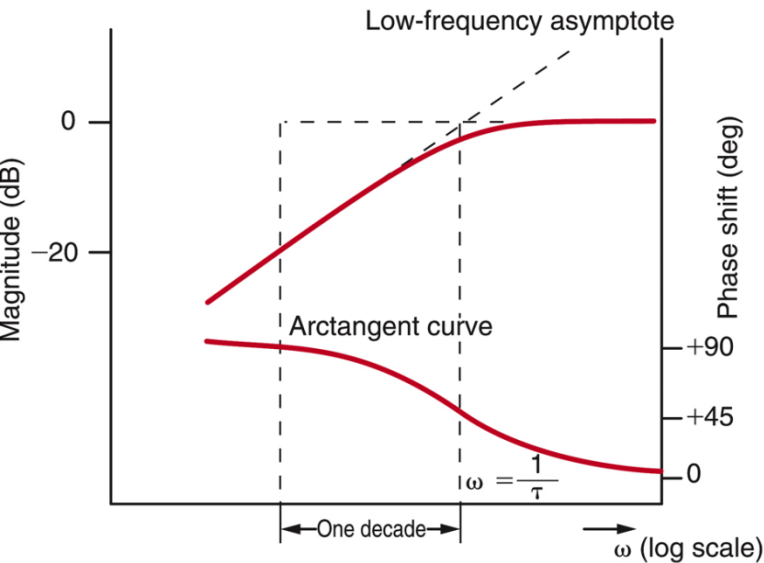
# Filter types – hoog doorlaat

high pass

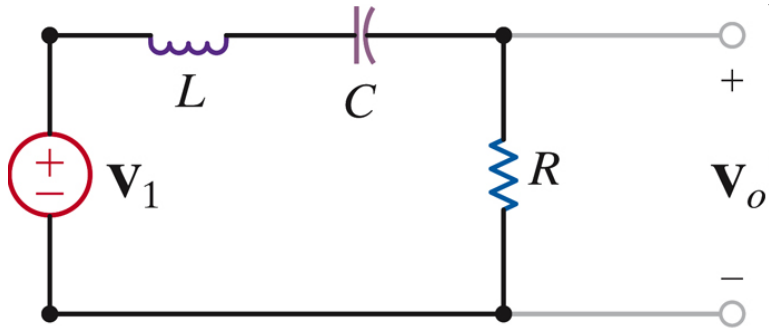


$$\hat{G}_v(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

- Afsnijffrequentie  $\omega_c = 1/RC$

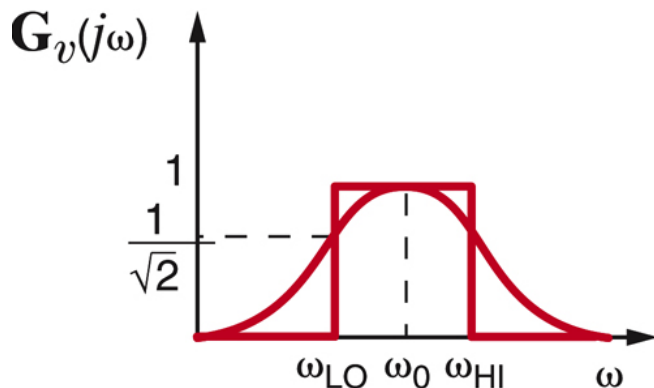


## Band pass

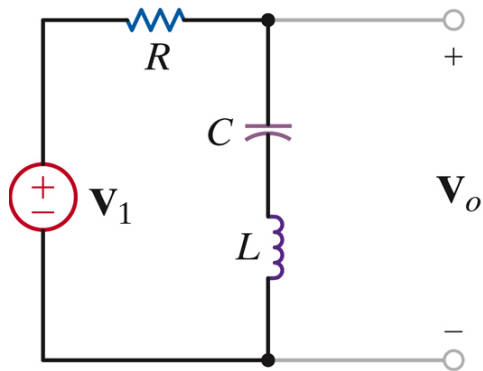


$$\hat{G}_v(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

- Twee afsnijfrequenties:  
 $\omega_{LO}$  en  $\omega_{HI}$
- Bandbreedte  
 $BW = \omega_{HI} - \omega_{LO}$
- Gebaseerd op serieresonantie

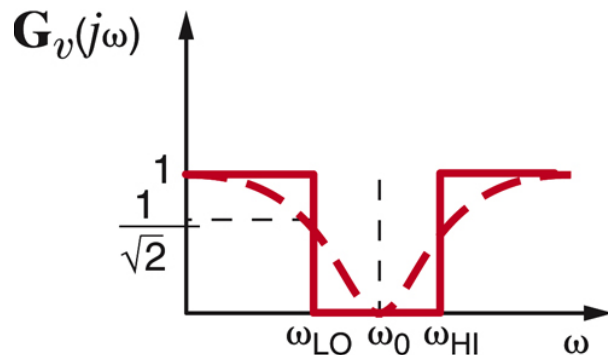


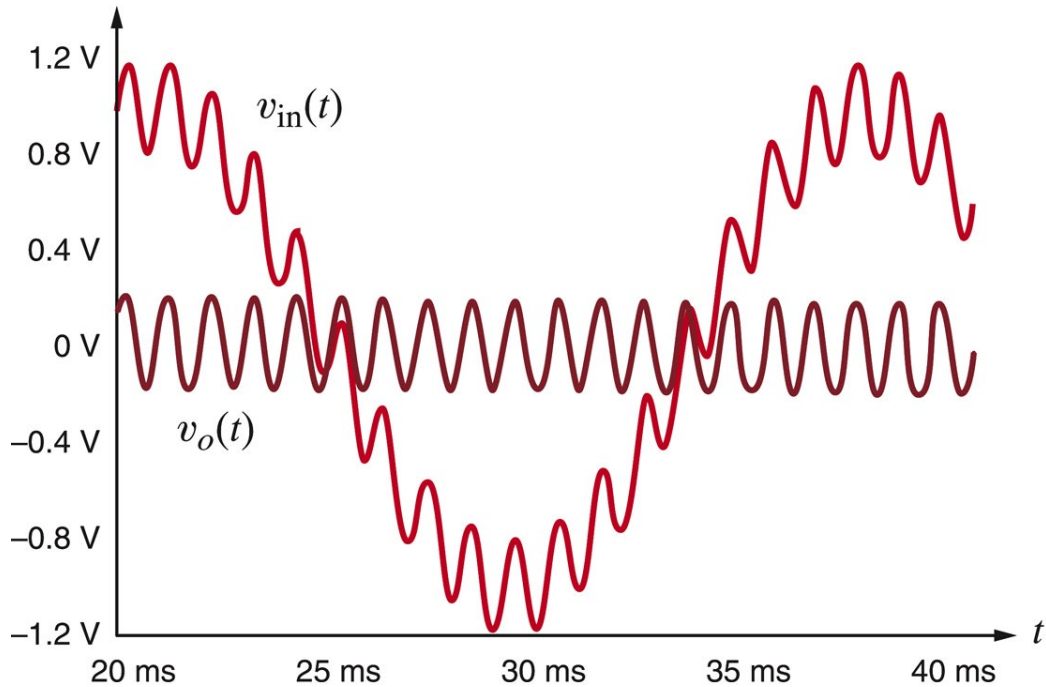
## Band reject



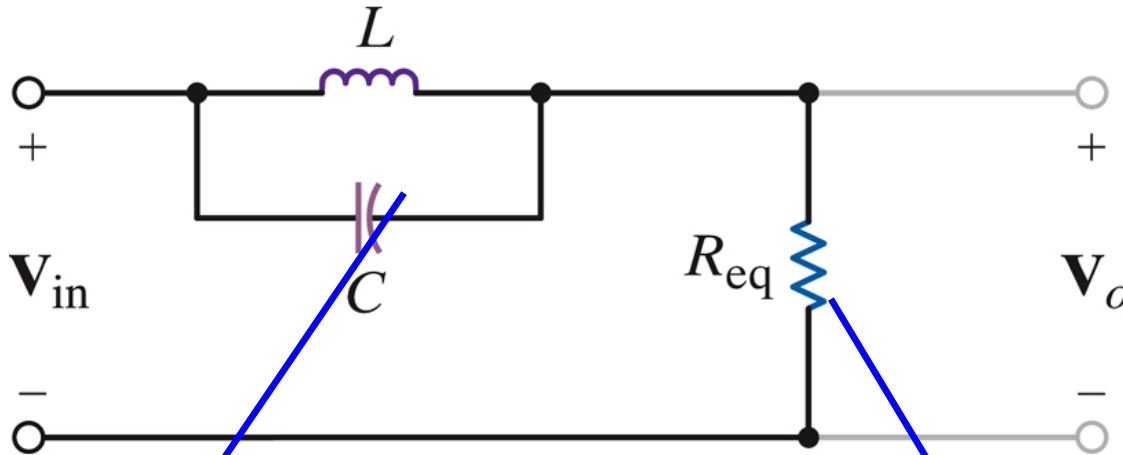
$$\hat{G}_v(j\omega) = \frac{j(\omega L - 1/\omega C)}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

- Twee afsnijfrequenties:  
 $\omega_{LO}$  en  $\omega_{HI}$
- Bandbreedte  
 $BW = \omega_{HI} - \omega_{LO}$
- Gebaseerd op serieresonantie





- Dit is het signaal op een telefoonlijn
  - Gewenste signaal 1000 Hz
  - Storing 60 Hz (US net frequentie) word ergens opgepikt
- We willen een 'notch' band stop filter dat de 60 Hz weghaalt



Impedantie van de telefoon + lijn

$$\hat{Z} = (j\omega L) \parallel (1/j\omega C) = \frac{L/C}{j\omega L + 1/j\omega C}$$

$$\frac{\hat{V}_o}{\hat{V}_{in}} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + \hat{Z}} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + \frac{L/C}{j\omega L + 1/j\omega C}} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{j\omega}{R_{eq}C}\right) + \frac{1}{LC}}$$

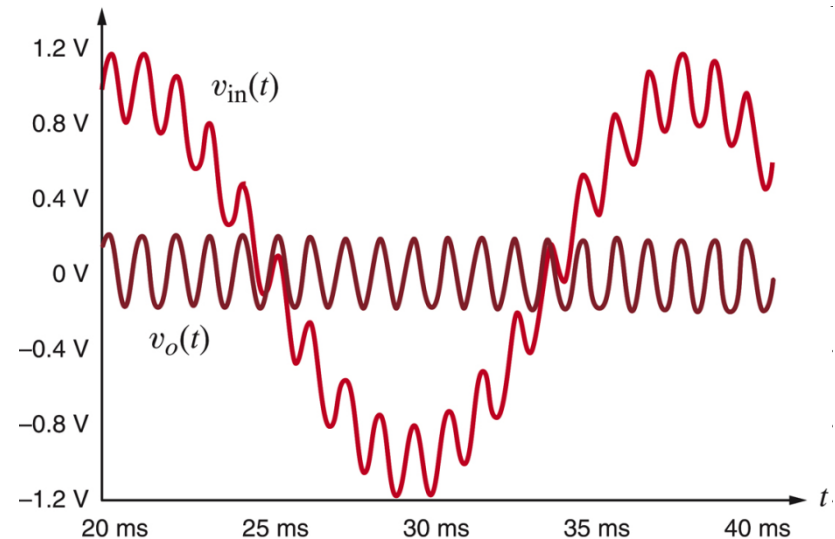
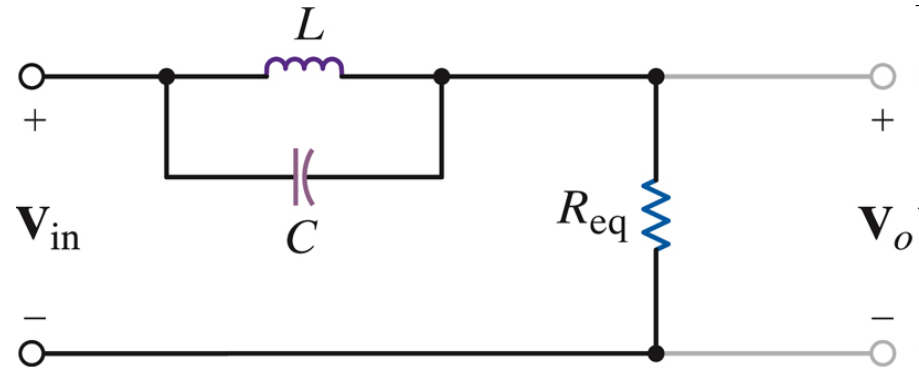
$$\frac{\hat{V}_o}{\hat{V}_{in}} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{j\omega}{R_{eq}C}\right) + \frac{1}{LC}}$$



Bij resonantie is de teller 0  
 We willen dat dit gebeurt bij 60 Hz

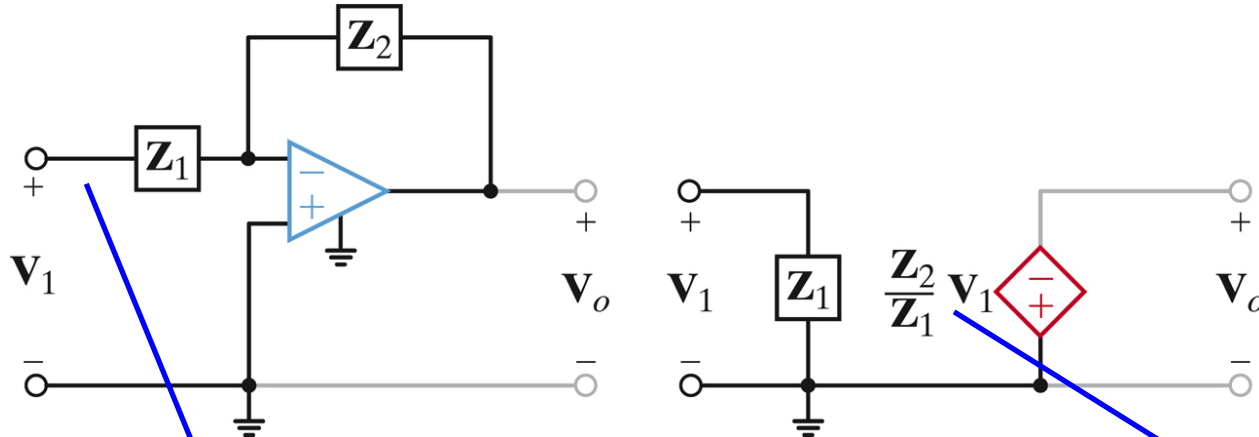
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi 60$$

→ kies  $C = 100\mu\text{F}$  →  $L = 70.3\text{ mH}$



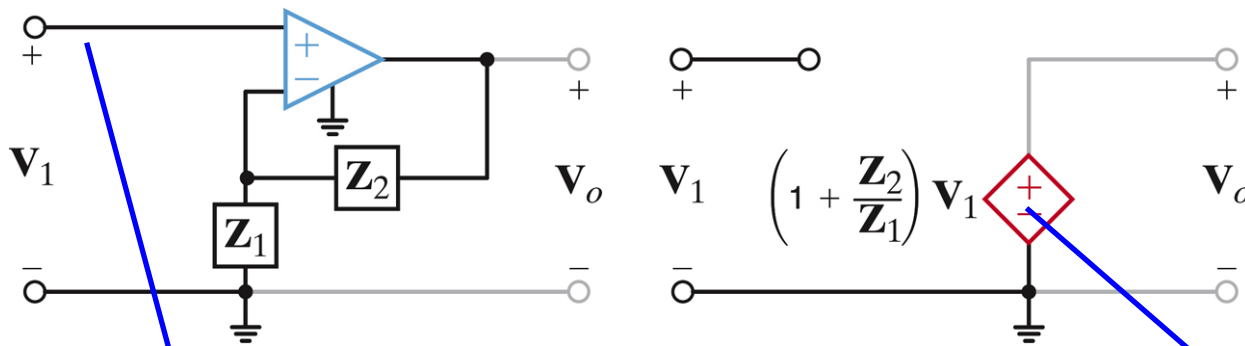


- De filters die we bekeken hebben zijn passieve filters
  - Ze kunnen enkel energie dissiperen
  - Ze kunnen enkel – selectief – verzwakken.
  - Dit is niet goed: de signalen gaan op den duur verloren in de stoorsignalen (ruis)
  
- We hebben een element nodig dat kan versterken
  - Operationele versterker
  - Actieve filters



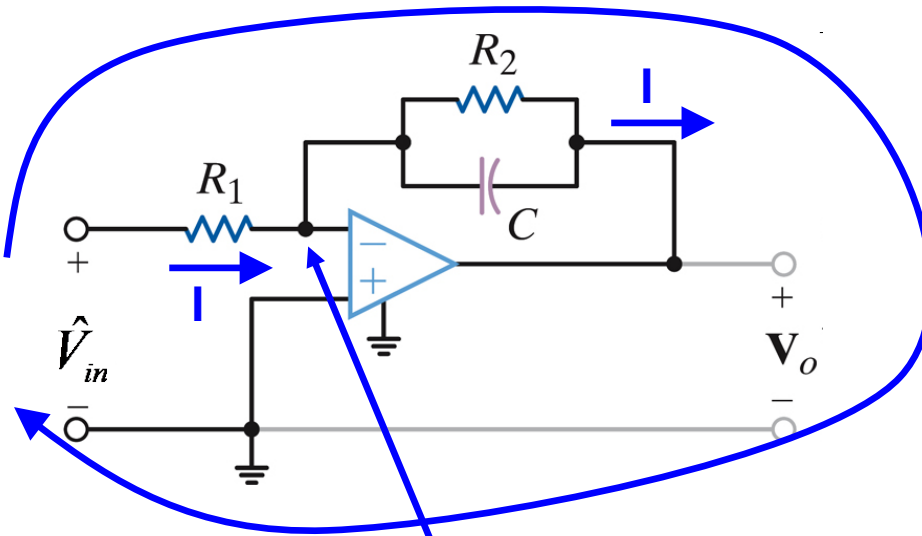
Filterkarakteristiek hangt af van  $Z_1, Z_2$

Signaal naar – klem van de opamp → fase wordt geïnverteerd



Signaal naar + klem van de opamp → fase wordt niet geïnverteerd

- Eerste orde opamp-RC filter!



$$\frac{\hat{V}_o}{\hat{V}_{in}} = -\frac{1}{1 + sR_2C} \frac{R_2}{R_1}$$

1<sup>e</sup> orde laagdoorlaat

- $\omega_c = 1/R_2C$
- $G_{DC} = -R_2/R_1$

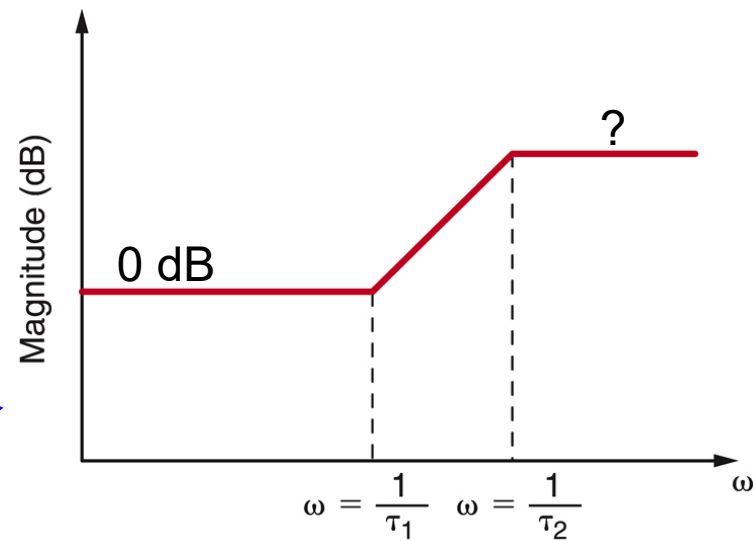
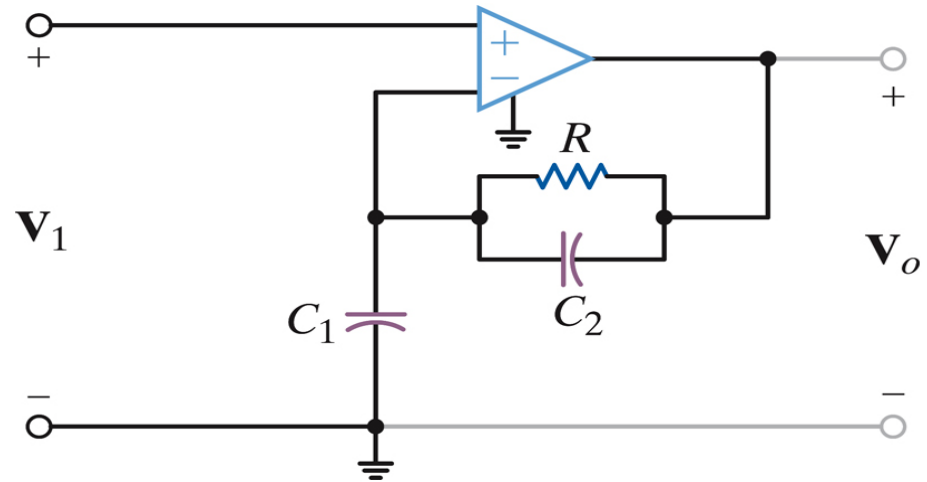
Ideale opamp met negatieve terugkoppeling  $\Rightarrow$   $V=0$  op deze knoop

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_{in}}{R_1}$$

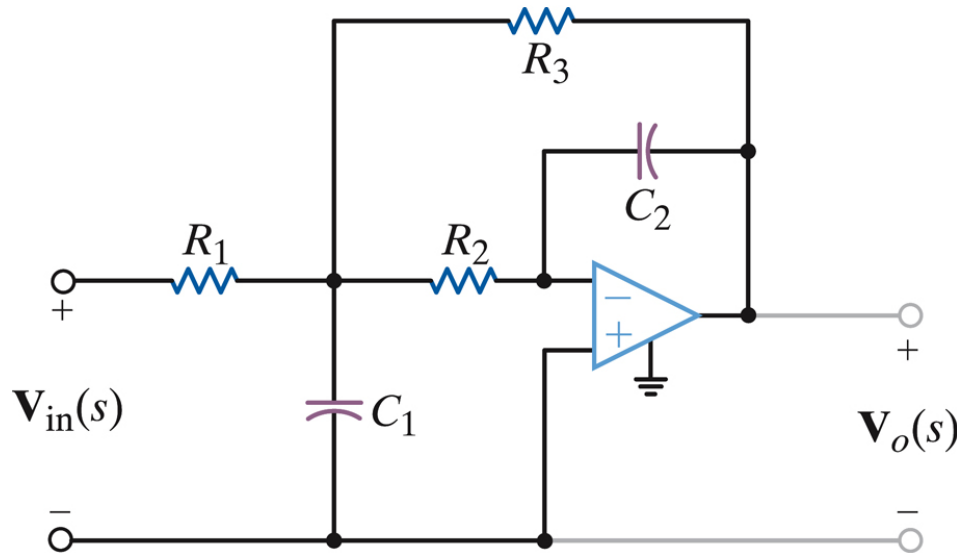
KVL

$$\begin{array}{l} R_1 \hat{I} + (R_2 \parallel C) \hat{I} + \hat{V}_o - \hat{V}_{in} = 0 \\ R_1 \frac{\hat{V}_{in}}{R_1} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC} \frac{\hat{V}_{in}}{R_1} + \hat{V}_o - \hat{V}_{in} = 0 \end{array} \quad \left| \quad \hat{V}_{in} \left( 1 + \frac{1}{1 + sR_2C} \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + \hat{V}_o = 0 \quad \right| \quad \frac{\hat{V}_o}{\hat{V}_{in}} = -\frac{1}{1 + sR_2C} \frac{R_2}{R_1}$$

- Bereken  $G_v(j\omega) = \frac{\hat{V}_o}{\hat{V}_2}$
  - $Z_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_1}$
  - $Z_2(j\omega) = \frac{R}{j\omega RC_2 + 1}$
  - $G_v(j\omega) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$
- $$= 1 + \frac{R/(j\omega RC_2 + 1)}{1/j\omega C_1}$$
- $$= \frac{j\omega(RC_1 + RC_2) + 1}{j\omega RC_2 + 1}$$
- $$= \frac{j\omega\tau_1 + 1}{j\omega\tau_2 + 1}$$
- $\tau_1 > \tau_2$  ➔



(b)



Laagdoorlaat filter

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{V}_o(s)}{\hat{V}_in(s)} = \frac{H_0 \omega_c^2}{s^2 + 2\zeta \omega_c s + \omega_c^2}$$

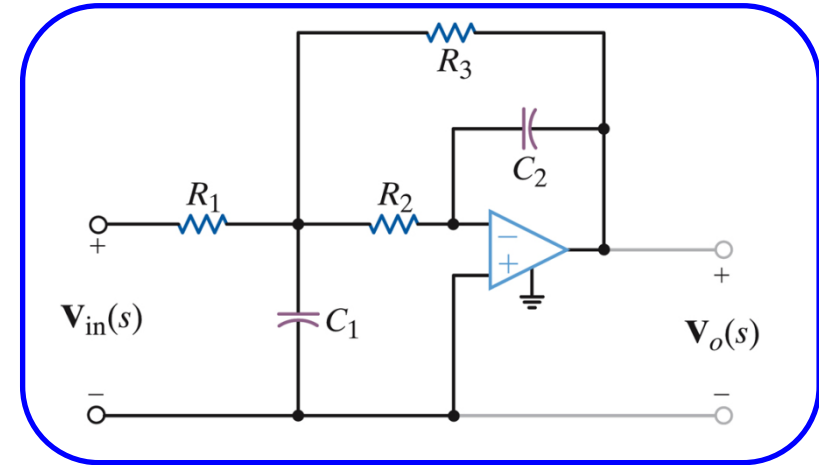
In dit geval

$$\hat{H}(s) = \frac{-\left(\frac{R_3}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}\right) + \frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}}$$

# Een tweede orde filter (II)

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{V}_o(s)}{\hat{V}_m(s)} = \frac{H_0 \omega_c^2}{s^2 + 2\zeta \omega_c s + \omega_c^2}$$

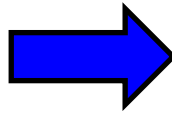
$$\hat{H}(s) = \frac{-\left(\frac{R_3}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}\right) + \frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}}$$



Door gelijkstelling vinden we

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_3 R_2 C_1 C_2}}$$

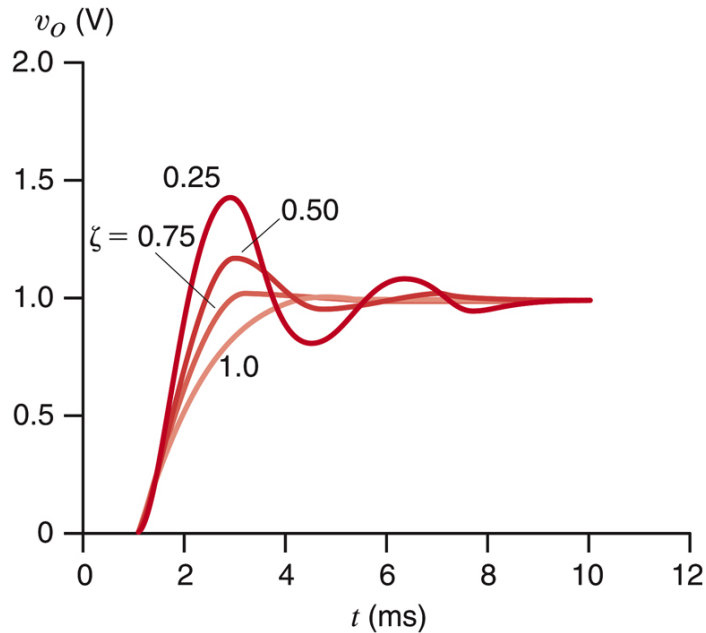
$$2\zeta \omega_c = \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$



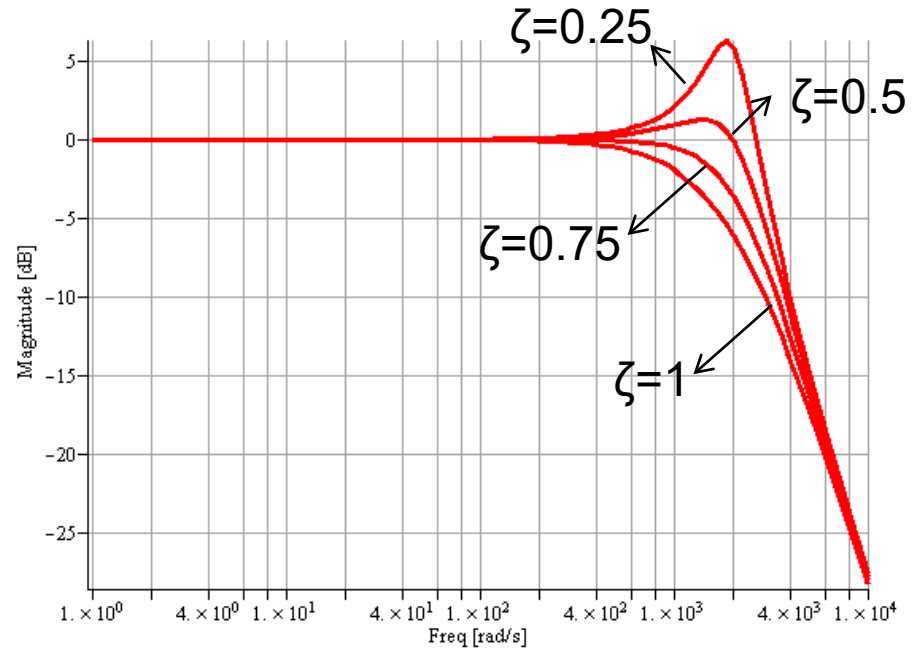
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_3 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_2 R_3}$$

$\omega_c$  en  $\zeta$  te bepalen door keuze van R's en C's  
Zie voorbeeld 12.24 voor  $\omega_c = 2000$  rad/s en  
 $\zeta = 0.25 \rightarrow 1$



Transient step response



Bode plot - magnitude

Hoe meer peaking in transferfunctie, hoe meer overshoot in stap responsie

Hier is via de laplace en fourier transformatie een verband tussen

- Inverse Laplace transformatie

$$f(t) \sim \int F(s)e^{st} ds$$

→ Integratie (optelling) van exponentiele functies in 's'

- Fourier transformatie  $s \leftarrow j\omega$

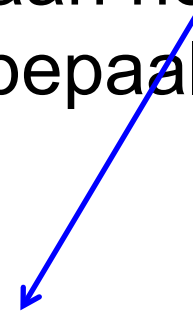
$$f(t) \sim \int F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

→ Integratie (optelling) van goniometrische functies in 'j $\omega$ '



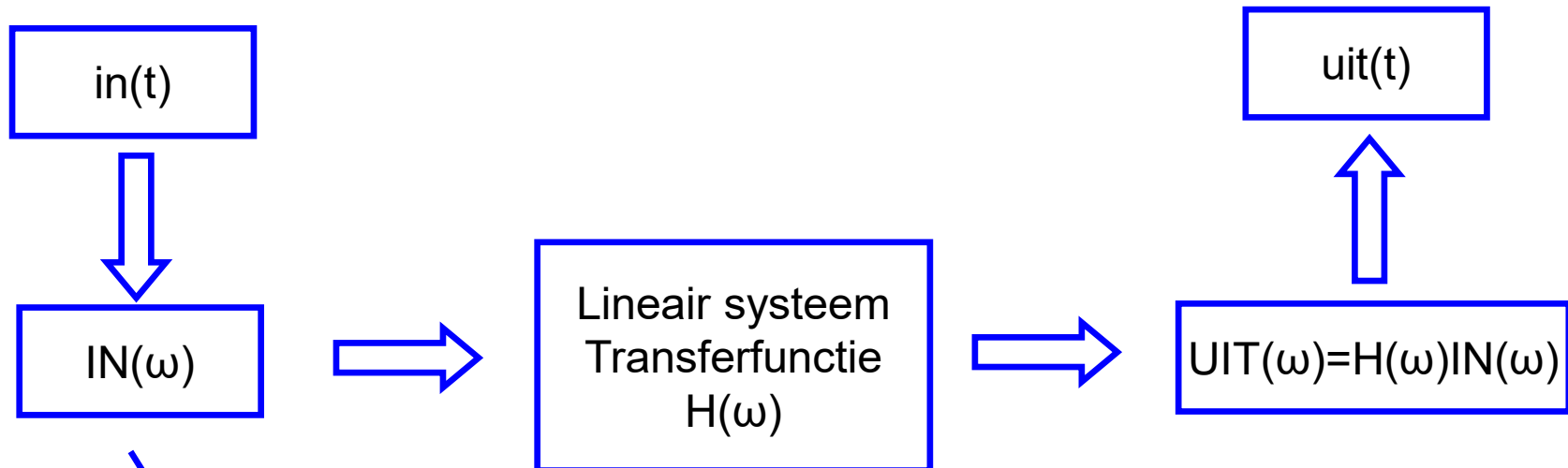
# Laplace / Fourier transformatie als som van goniometrische functies (II)

- Fourier transformatie geeft dus aan hoeveel van een signaal (functie) bevat van een bepaalde frequentie



Amplitude en Faze

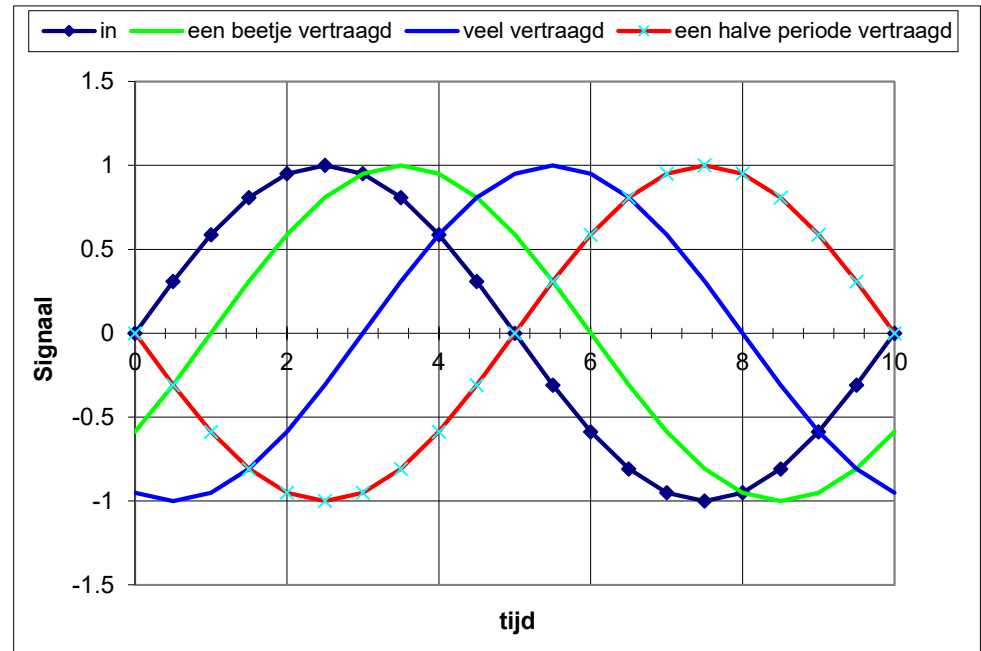
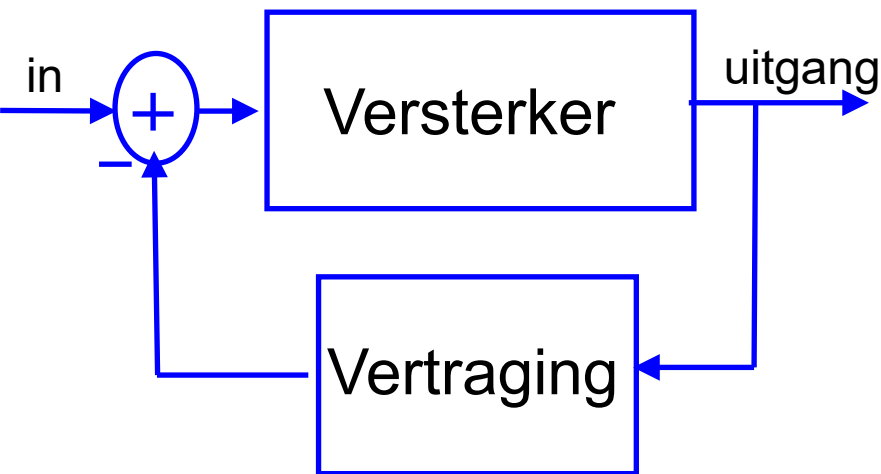
- Transferfunctie geeft aan hoe faze en amplitude van ingangssignaal veranderen om tot uitgangssignaal te komen



Signalen bevatten meerdere frequenties tegelijk  
Deze worden in een lineair systeem onafhankelijk behandeld

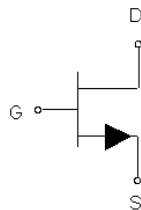
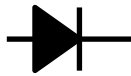
# Er zit een adder onder het gras ...

- We kunnen ongelooflijk veel filters maken maar we gaan eens naar stabiliteit moeten kijken ...

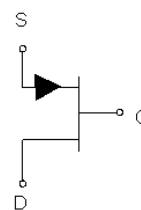


- aftrekken wordt optellen  $\Rightarrow$  onstabiel!
- Kan genalyseerd worden met bode plots ...

- Er bestaan nog hopen elektronische componenten die we niet gezien hebben ...
- Niet lineaire elementen → niet lineaire circuits
  - Diodes
  - Bipolar transistors
  - MOS transistors
  - ....(geen zorg we gaan ze lineariseren...)



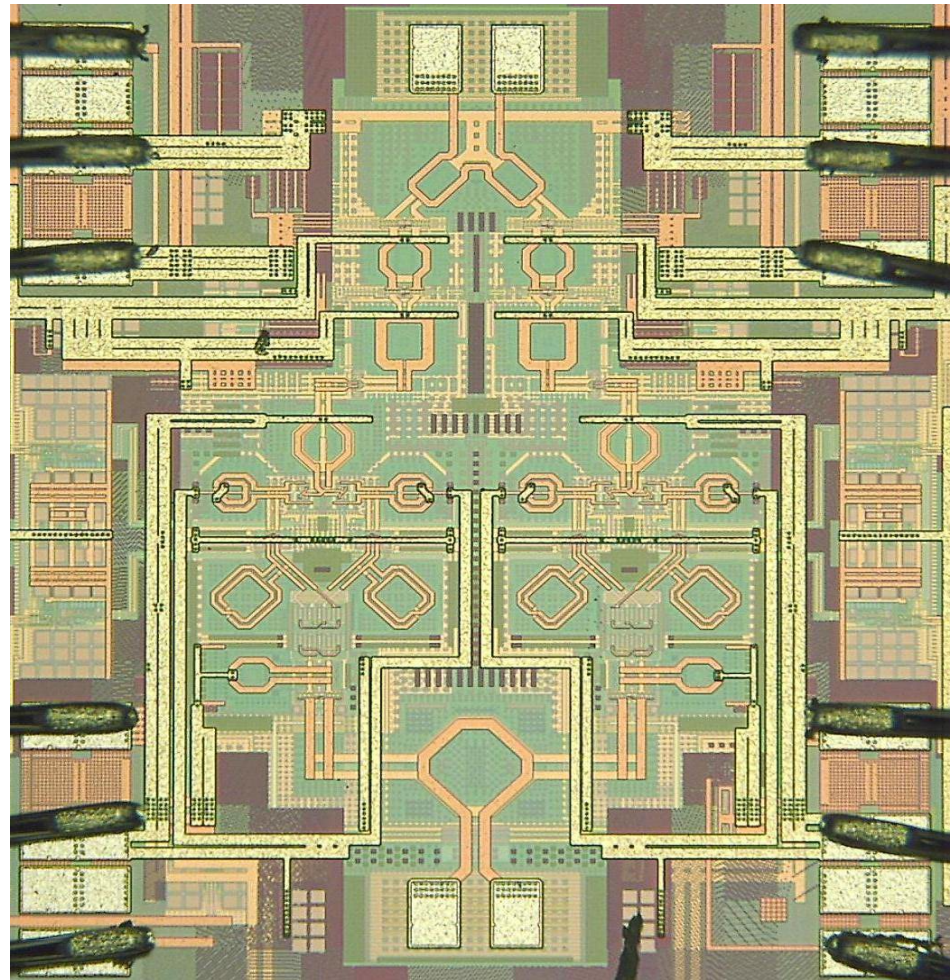
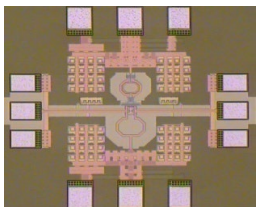
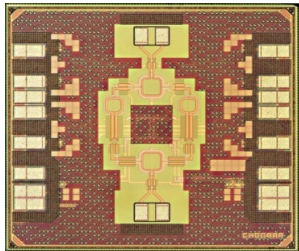
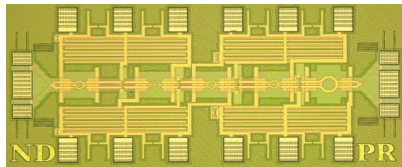
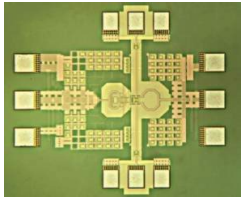
(a)



(b)

- We hebben tot nu toe enkel DC en sinusoidaal AC analyse uitgevoerd
- Als we nu de Laplace en/of de Fourier transformatie erbij halen dan kunnen we elk signaal aan ons lineair systeem aanleggen.
  
- → systeemtheorie
  - Stabiliteit
  - Discrete versus continue signalen
  
- Digitaal is de opstap naar grote complexiteit, processoren, DSP, ...

- Echte chips



Zender op 60 GHz in 40 nm [ISSCC2012]

That is all folks



**Thank you !**

- 12.1 variable frequency response analysis
- 12.2 sinusoidal frequency analysis
- 12.3 resonant circuits
- 12.4 scaling
  - Niet gezien
- 12.5 filter networks
  - Alles behalve 'programmability of OTAs'
- 12.6 application examples
  - Voorbeelden
- 12.7 design examples
  - Voorbeelden